https://doi.org/10.17576/apjitm-2012-0101-05

http://www.ftsm.ukm.my/apjitm
Asia-Pacific Journal of Information Technology and Multimedia
Jurnal Teknologi Maklumat dan Multimedia Asia-Pasifik
Vol.1 No. 1, June2012
e-ISSN:2289-2192

Alat Bantuan Pembelajaran Berautomasi untuk Kalkulus Vektor: Pengamiran Terhadap Rantau Satah

Yuzita Yaacob, Michael Wester dan Stanly Steinberg

ABSTRAK

Kajian ini membincang mengenai prototaip pakej pembelajaran berbantu komputer *Interactive Learning – Mathematica Enhanced Vector Calculus* (ILMEV) bagi membantu memahami teori dan aplikasi pengamiran dalam kalkulus vektor. Masalah utama mengguna Mathematica ialah menterjemah huraian masalah dalam buku teks kepada bentuk yang difahami oleh Mathematica serta memilih teknik penyelesaian yang tepat. ILMEV dibangun bagi membantu pelajar melaksana proses sedemikian. Penyampaian bahan dalam buku teks lazimnya sukar disuai dengan antara muka interaktif. Justeru, model pengamiran vektor yang membenar ILMEV mempersembah keseluruhan struktur bahan tersebut bagi membantu pelajar memilih kaedah penyelesaian yang tepat dibangun. Mathematica boleh menyelesai masalah yang diterjemah mengguna algoritma *Cylindrical Algebraic Decomposition* (CAD), tetapi tidak menyedia penjelasan apa yang sedang dilakukan. Justeru, kajian ini melaksana algoritma CAD yang dipermudah bagi menyusut kamiran yang terdapat dalam kalkulus vektor kepada jumlah kamiran lelaran dan kemudian pengiraan dilaksana oleh Mathematica bagi memboleh pelajar melakukan pengiraan secara interaktif bagi penyelesaian bentuk tertutup kepada contoh dua dimensi yang terdapat dalam buku teks dengan mengguna antara muka ILMEV. ILMEV dibangun berasaskan prinsip panduan pedagogi - interaktiviti, visualisasi, ujikaji, prinsip kotak putih/kotak hitam, kepelbagaian perwakilan dan teknik langkah demi langkah berserta penjelasan. Antara muka pengguna adalah genting dalam pelaksanaan prinsip panduan tersebut.

Kata Kunci: Algebra komputer, kalkulus vektor, algoritma *Cylindrical Algebraic Decomposition* (CAD) dan prinsip panduan pedagogi sistem algebra komputer (SAK).

ABSTRACT

This paper presents a computer learning assistant ILMEV (Interactive Learning - Mathematica Enhanced Vector calculus), that helps students understand the theory and applications of integration in vector calculus. No Computer Algebra System (CAS) has algorithms powerful enough to automatically solve all but the most elementary problems of this type that appear in textbooks. To overcome this, we implemented ILMEV, which can compute closed form solutions to many two dimensional textbook examples without substantial user intervention. ILMEV succeeds because it contains simplified Cylindrical Algebraic Decomposition(CAD) algorithms for reducing the integrals appearing in vector calculus to sums of iterated integrals which Mathematica can then compute. The typical presentation of this material in textbooks was reorganized and a model was created to make it suitable for developing ILMEV. The important educational guiding principles (interactivity, visualization, experimentation, White and Black Box Principle, multiple representations and step-by-step technique (with some explanations)), and an easy to use interface were also incorporated in ILMEV.

Makalah ini telah terbit dalam *International Journal of Technology in Mathematics Education* (dahulunya dikenali sebagai *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, jilid 2010, 17(2):81-86 di bawah tajuk Towards the Development of an Automated Learning Assistant for Vector Calculus: Integration over Planar

https://doi.org/10.17576/apjitm-2012-0101-05

Keyword: Computer algebra, Vector calculus, Cylindrical algebraic decomposition algorithm (CAD), Computer algebra system pedagogical guiding principle.

1. PENGENALAN

Beberapa tahun kebelakangan ini terdapat minat yang mendalam bagi menggabung komputer dalam pengajaran dan pembelajaran kursus sains dan matematik pada peringkat universiti, terutamanya kalkulus mengguna sistem algebra komputer (SAK) (Yasskin & Belmonte, 2003; Tiwari, 2007; Guyer, 2008). Walaupun pendidik percaya SAK berpotensi besar bagi meningkat pendidikan matematik, namun keupayaan perisian tersebut mempunyai batasan yang sering menyukar penggunaannya dalam bilik darjah (Tintarev, 2002). Kebanyakan SAK hanya memberi jawapan kepada pelajar tanpa sebarang penjelasan mengenai langkah bagi memperoleh jawapan tersebut.

ILMEV adalah alat yang dibangun bagi membantu pelajar mempelajari cara melaksana pengamiran terhadap domain satah dalam kursus kalkulus vektor peringkat awaldi Universiti Kebangsaan Malaysia (Yaacob, 2007; Yaacob, et al., 2008). Pelajar baharu sahaja tamat mengambil kurikulum matematik ketika di Sekolah Menengah Atas dalam subjek kalkulus, aljabar, geometri dan trigonometri. Kandungan kursus adalah berdasarkan buku teks yang ditulis oleh Davis dan Snider (1995). Kalkulus vektor dipilih kerana subjek ini kritikal bagi menyelesai masalah dalam bidang kejuruteraan dan sains. Banyak program pendidikan memerlukan kursus mengenai topik ini. Matematik yang terlibat adalah sukar walaupun bagi pelajar yang berbakat dan terlatih (Davis, Porta &Uhl, 1999).ILMEV pada masa ini sedang diperluas supaya boleh mengirakamiran komponen tangen medan vector terhadap lengkung dan kamiran komponen normal medan vektor terhadap permukaan. Keupayaan ini memboleh pemasukan versi multidimensi untuk teorem asas kalkulus dan teorem kamiran bahagian demi bahagian, termasuk teorem kecapahan danteorem Stokes (Wester, Yaacob & Steinberg, 2011).

Aplikasi kepada prinsip panduan pedagogi yang teliti dalam ILMEV memasti ILMEV berguna dalam pengajaran dan pembelajaran subjek berkenaan (Leinbach et al., 1997). Kunci bagi melaksana prinsip ini ialah antara muka Mathematica yang mesra pengguna. Ia memboleh pengguna mengakses sepenuhnya kekuatan Mathematica tanpa perlu menguasai idiosinkrasi antara mukanya (Tintarev, 2002).

2. MASALAH PENGAMIRAN TIPIKAL

Pertimbang masalah penting yang kerap ditemui dalam buku kalkulus (Davis & Snider,1995): Enam garisan

$y = x + 1$, $y = -x + 1$, $y = x - 1$,
$y = -x - 1, y = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$

membatas satu heksagon dalam satah. Tulis luas kawasan ini sebagai jumlah kamiran terlelar dan kemudian menilainya bagi mencari nilai luas kawasan ini. Semak jawapan yang diperoleh daripada dapatan luas mengguna asas geometri. Bahagian genting dalam masalah ini ialah memahami geometri. Antara muka ILMEV memudah tugas ini.

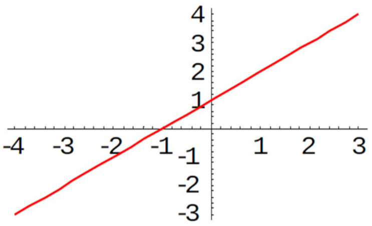
2D			
$\int_{c}^{\square} \mathrm{ds}$	$\int_{c}^{\square} \mathbf{F} \bullet \mathbf{t}\mathrm{ds}$	$\int_{c}^{\square} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{ds}$	$\iint_{\Omega}^{\square} \mathrm{dA}$

Rajah 1 Sesi Permulaan ILMEV

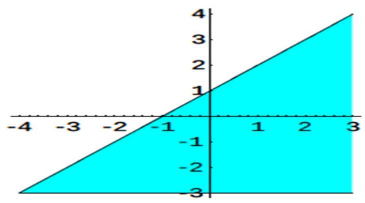
https://doi.org/10.17576/apjitm-2012-0101-05

Pelajar perlu memula ILMEV dalam Mathematica dan kemudian memilih jenis masalah yang hendak diselesai. Sebahagian daripada menu ditunjukkan dalam Rajah 1. Bagi masalah ini, pelajar harus memilih luas integer. Seterusnya, pelajar perlu menentu bilangan persamaan sempadan dalam sesuatu masalah dan kemudian memasukkan persamaan tersebut. Selepas memasukkan satu persamaan, ILMEV membantu menyedia ketaksamaan sepadan. Rajah 2 menunjukkan bahagian pertama bagi penyelesaian masalah:

The number n of inequalities: 6
Equation #1:
$y = x + 1$
The graph of $y = x + 1$ where
$-4 \leq x \leq 3$:

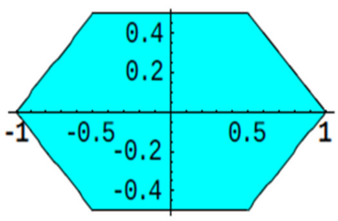


Inequalities for $y = x + 1$:
$y \leq x + 1$
graph of $y \leq x + 1$:



Rajah 2: Sebahagian Sesi ILMEV

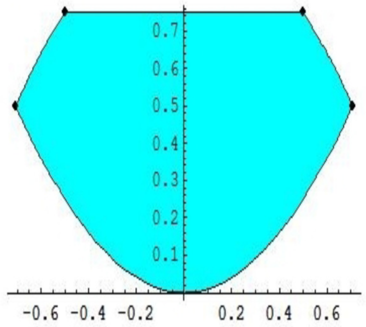
Setelah itu, pelajar memasukkan lima persamaan lagi dan menukar setiap satu kepada ketaksamaan. ILMEV mencetak beberapa maklumat mengenai titik persilangan garis lurus tersebut, yang memberi bucu heksagon, dan kemudian memplot heksagon tersebut (lihat Rajah 3).



Rajah 3: Heksagon
Seterusnya, ILMEV memapar kamiran terlelar secara simbolik:

$$\int_{-1}^{-0.5} \int_{-1-x}^{1+x} 1\, dydx + \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} 1\, dydx + \int_{0.5}^{1} \int_{-1+x}^{1-x} 1\, dydx$$

Setelah itu, pelajar boleh meminta ILMEV menilai kamiran tersebut yang menghasil keluasan bernilai 3/2.



Rajah 4: Persamaan Kuadratik

ILMEV juga boleh mengira kamiran bagi kawasan yang digambar oleh persamaan kuadratik dengan cara yang sama seperti yang diguna bagi persamaan linear. Sebagai contoh kawasan yang ditunjuk dalam Rajah 4 diberi oleh:
$y \geq x^2$, $y \leq 1-x^2$, $y \leq 3/4$
ILMEV memberiluas sebagai:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{x^2}^{\frac{3}{4}} 1\, dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{x^2}^{1-x^2} 1\, dydx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{2}}\int_{x^2}^{1-x^2} 1\, dydx$$

Yang mudah dinilai oleh Mathematica dan menghasil:
$(4\sqrt{2}-1)/6$

Satu kelebihan ILMEV ialah *notebook* boleh diguna semula dengan mudah. Sebagai contoh, dalam ketaksamaan $y \geq x^2$ boleh diganti dengan $y \geq 2x^2 - 1/2$, dan kemudian boleh dilaksana semula. Contoh lain, seorang pelajar boleh mengganti tiga tembereng teratas heksagon dengan$y = 1 - x^2$ dan kemudian mengira semula keluasan tersebut. Keupayaan grafik ILMEV (memplot setiap ketaksamaan secara berasingan dan kemudian memplot semua secara serentak) dapat membantu pelajar melihat titik pertemuan termini lengkung baharu bertindan dengan titik pertemuan termini sempadan bawah heksagon.

3. PENGAMIRAN MULTIDIMENSI

Masalah matematik yang pertama dihadapi dalam percubaan menguji pelaksanaan ILMEV ialah persembahanbahan ke atas pengamiran multidimensi dalam piawai teksyang perlu disusun semula supaya boleh diguna dalam pelaksanaan. Penyusunan yang terhasil diguna bagi mereka bentuk bahagian permulaan antara muka supaya pelajar dapat memilih jenis masalah yang diingini. Penyusunan semula disempurna bagi dimensi ruang 1, 2 dan 3 dan dimasukkan ke dalam antara muka ILMEV (Rajah 1 menunjukkan kemungkinan kamiran 2D). Algoritma bagi menyelesai semua masalah yang diterangkan dalam antara muka dibangun (Wester, Yaacob & Steinberg, 2009) dan dimasuk dalam versi ILMEV pada masa hadapan.

Alat SAK yang genting bagi menyelesai masalah pengamiran ialah algoritma *Cylindrical Algebraic Decomposition* (CAD) (untuk pengenalan lihat Hong, Liska & Steinberg, 1997). Algoritma CAD melerai sebarang kawasan yang ditakrif oleh ketaksamaan polinomial kepada kesatuan kawasan mudah tidak berkait yang dikenali sebagai silinder. Algoritma bagi pengiraan CAD dibangun pada bahagian akhir abad ke dua puluh dan penting bagi menyelesai banyak masalah geometri mengguna SAK. Versi Mathematica yang terbaharu melaksana fungsi CAD. Bag iILMEV versi ini, kajian mengimplementasi CAD mudah yang boleh mengendali banyak masalah asas yang kebanyakannya terdapat dalam

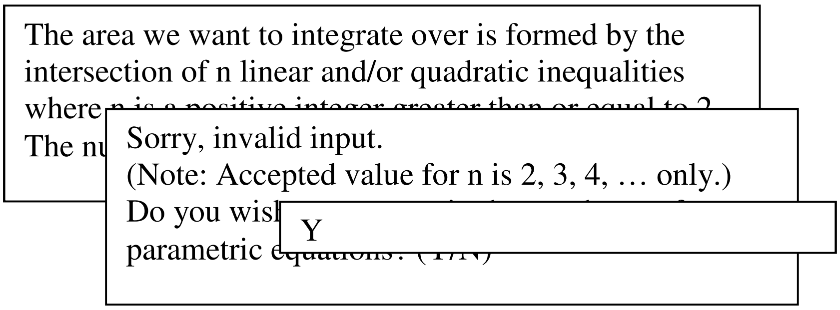
https://doi.org/10.17576/apjitm-2012-0101-05

buku teks matematik. Versi ILMEV yang seterusnya mengguna algoritma Mathematica (Wester, Yaacob & Steinberg, 2011). Menurut contoh di atas, CAD melerai heksagon kepada tiga bahagian, satu segi empat pada bahagian tengah dan satu segitiga pada setiap penjuru:
$-1 \leq x \leq -½$ dan $-1-x \leq y \leq 1 + x$
$-½ \leq x \leq ½$ dan $-½ \leq y \leq ½$
$½ \leq x \leq 1$ dan $-1 + x \leq y \leq 1-x$

Penguraian ini memberi semua maklumat yang diperlu bagi menulis kamiran terlelar persamaan di atas.

4. ANTARA MUKA MESRA PENGGUNA ILMEV

Beberapa pakej pendidikan mengambil pendekatan perbualan, mengguna dialog soal jawab bagi berinteraksi dengan pelajar melalui turutan logik tertentu.Oleh kerana matlamat kajian ini ialah menghasil alat yang mengambil manfaat daripada prinsip panduan pedagogi seperti interaktiviti, visualisasi dan ujikaji, maka kajian memilih tidak mengikuti pendekatan tersebut. Keputusan ini diambil kerana tugas ini perlu dimanipulasi secara langsung dan antara muka berasaskan menu mengguna dialog berasaskan peristiwa melibatkan pengguna memula urutan dialog (lihat Rajah 5).



Rajah 5: Sesi ILMEV: pembetulan input

Program aljabar komputer tidak bertolak ansur terhadap kesilapan pengguna dan mendesak pengguna menentukan arahan atau input yang diingini dengan tepat mengikut format yang dikehendaki (arahan sintaks serta tertib operasi yang tepat), dengan sedikit atau tidak ada bantuan daripada perisian (Tintarev, 2002). Bagaimanapun, ILMEV membantu mengurangi kelemahan ini dengan menyedia kemudahan bimbingan input seperti berikut:

i. Input ungkapan matematik diperiksa dan, jika perlu, diubahsuai bagi dipadan dengan sintaks Mathematica.
ii. Keadaan dan sekatan ke atas input diambil kira apabila diperlu.
iii. Mesej ralat dihasil untuk input yang tidak tepat.
iv. Cadangan diberi bagi memperbaiki input tertentu.

Ini membenar pengguna dengan mudah melakukan input dan mengubah suai ungkapan matematik mengikut format Mathematica. Justeru, pengguna tidak perlu berinteraksi dengan Mathematica secara langsung dan hanya perlu tahu sedikit sahaja struktur arahan dan sintaks Mathematica.

Semua input untuk ILMEV dilakukan melalui kotak dialog popup yang diguna bagi menjana arahan matematik, memplot dan animasi. Terdapat dua jenis kotak popup: kotak dialog dan kotak teks sahaja. Input seperti persamaan, ketaksamaan dan arahan memplot dimasuk ke dalam kotak dialog, dan mesej ralat untuk input yang salah dan cadangan bagaimana caranya memperbaiki input tertentu adalah dalam bentuk kotak teks (tidak ada input dibenar). Ungkapan boleh dimasuk dalam kotak dialog dengan menaip pada papan kekunci. Kotak dialog dan kotak teks boleh digerak pada sekitar skrin dan disembunyi jika dikehendaki. Jika pengguna membuat kesilapan, maka boleh diperbetul dengan menaip semula maklumat. Keputusan semua operasi oleh pengguna ditampal dalam Mathematica. *Notebook* pula secara automatik mendokumentasi penyelesaian masalah tersebut. Kajian ini membangun antara muka ILMEV yang berkeupayaan tinggi bagi menyokong pelaksanaan beberapa prinsip pembelajaran yang penting.

5. PRINSIP PANDUAN PEDAGOGI ILMEV

ILMEV dibangun mengguna prinsip panduan yang diguna dalam pendidikan berasaskan komputer: interaktiviti, visualisasi, eksperimentasi, prinsip kotak hitam/kotak putih, kepelbagaian perwakilan dan teknik langkah demi langkah berserta penjelasan (Kutzler, 1994; Kutzler, 1999; Kutzler, 2008; Yaacob, 2007).

5.1 Interaktiviti

Reeves (2006) mentakrif persekitaran pembelajaran sebagai interaktif dalam erti kata seseorang dapat menjelajah melaluinya, memilih maklumat yang berkaitan, bertindak balas kepada soalan mengguna peranti input komputer seperti papan kekunci, tetikus, skrin sentuh atau sistem arahan suara, menyelesai masalah, menyelesai tugas yang mencabar, mencipta persembahan pengetahuan, bekerjasama dengan yang lain samaada jauh atau dekat, atauhanya melibatkan diri dengan aktiviti pembelajaran yang bermakna. Konsep pembelajaran interaktif (Grabinger,1996) memberi kesan yang mendalam dalam mempengaruhi rekabentuk ILMEV. Pengguna boleh memilih situasi pembelajaran sendiri seperti bergerak dari satu topik ke satu topik dengan mudah dan berkesan (Heugl, Barzel & Furukawa, 1997). Tambahan pula, kajian juga menekankan hasil padaperingkat yang lebih tinggi dalam pembelajaran interaktif seperti motivasi dan merangsang daya fikir ingin tahu (Drijvers,1997). Ia penting bagi pelajar mempunyai rasa motivasi dalam mempelajari matematik dan mempertingkat rasa ingin tahu terhadap matematik.

Antaramuka ILMEV memberi kesan yang mendalam bagi mengalak interaktiviti. Memandangkan semua kerja pelajar adalah dalam Mathematica *notebook*, maka pengubahsuaian kepada kerja dapat dilakukan dengan mudah. Sebagai contoh, plot yang terpapar dalam *notebook* boleh diperbaiki dengan mudah mengguna tetikus bagi mengubah saiz dan kedudukan graf, di samping mengezum dalam atau luar. Tambahan lagi, tidak sukar mengubah satu atau lebih sempadan garisan dan membuat pengiraan semula.

5.2 Visualisasi

Seperti yang tertera dalam buku teks (lihat permulaan bahagian 2), banyak masalah pengamiran sukar divisual. Seperti yang ditunjuk dalam Rajah 2 dan 3, ILMEV mengguna kemudahan grafik berkuasa tinggi dan serba boleh dalam Mathematica bagi membantu pelajar memahami hubungan antara formula aljabar dan geometri. Ia adalah mudah bagi mereka bentuk grafik atau animasi baharu dalam ILMEV, hanya dengan mengubah parameter dalam contoh yang sedia ada (Heugl, Barzel & Furukawa, 1997). Pengguna dapat meneroka konsep matematik sendiri dengan mencipta visualisasi sendiri dalam perkara tertentu, lantas dapat memperbaiki pemahaman (Amrehein, Bengtsson & Maeder, 1997). Tambahan pula, grafik membenar pengguna melihat masalah daripada perspektif yang berbeza. Hal yang demikian membantu menyelesai masalah yang sebelumnya sukar divisualisasi, dan pada masa yang sama, memperbaiki keupayaan ruang visualisasi mereka. Sebagai contoh, kawasan asas dalam ILMEV disifatkan dengan mengguna ketaksamaan dalam bentuk $f\ (x,) > 0$ atau $f\ (x,)<0$. Pelajar sering mengalami kesukaran memilih antara > dan <.Oleh yang demikian, ILMEV memplot $f\ (x,)=0$ pada permulaannya dan pelajar boleh mengguna plot tersebut bagi membantu memilih ketaksamaan yang sewajarnya.

5.3 Ujikaji

Banyak teori psikologi pembelajaran menganggap pembelajaran sebagai proses beraruhan yang melihat ujikaji memainkan peranan penting (Kutzler, 1994; Kutzler, 1998; Kutzler 2008). Proses pembelajaran dalam ILMEV berdasar ujikaji. Pengguna mengaplikasi algoritma yang telah diketahui bagi menjana contoh lantas membentuk satu terkaan melalui pemerhatian contoh tersebut (Heugl, Barzel & Furukawa, 1997). Aktiviti tipikal yang terlibat dalam ujikaji (melalui kaedah cuba jaya) dengan berbagai parameter bagi menghasil lebih banyak contoh, membentuk terkaan dan taakulan munasabah (Heugl, Barzel & Furukawa, 1997). Hasil terpenting dalam proses pembelajaran ini adalah lebih kepada pembelajaran secara kendiri dan eksperimental (Heugl, Barzel & Furukawa, 1997).

Tambahan pula, dalam waktu kelas atau makmal tutorial, pelajar dan guru hanya dapat mencerap bilangan masalah yang terbatas dan sebahagian besar daripada kerja pelajar mungkin tidak tepat disebabkan kesilapan dalam pengiraan (Kutzler, 1998). Penggunaan ILMEV, memboleh pelajar mampu bereksperimen dengan berbagai masalah dalam waktu kelas atau makmal tutorial. Misalnya, pelajar boleh mencuba berbagai jenis contoh dengan menukar nilai parameter dalam masalah tersebut dan membentuk terkaan melalui pemerhatian terhadap contoh. Pelajar juga boleh mencipta banyak contoh kompleks yang diambil daripada buku teks atau dari imaginasi sendiri. Menguji dan mengkaji pengaruh parameter terhadap tingkah laku sesuatu penyelesaian adalah tugas mudah dalam ILMEV.

5.4 Prinsip Kotak Putih/Kotak Hitam

Prinsip kotak putih/kotak hitam diperkenal (Buchberger, 1993) bagi menyelaras pandangan melampau "tradisionalis" yang mahu mengharam komputer daripada pendidikan matematik. Pandangan tradisionalis menganggap komputer boleh menghalang pemahaman yang mendalam tentang konsep matematik. Prinsip kotak putih/kotak hitam member pandangan secara progresif dengan menyokong supaya pelajar dilatih mengguna komputer bagi melakukan operasi matematik dengan pantas dan berkesan.

Dalam fasa kotak putih, pelajar diajar mengenai konsep matematik, algoritma dan teori matematik bagi menyelesai masalah tertentu. Tambahan pula, kemahiran pengiraan yang diperlu dapat dibangun semasa proses pengiraan. ILMEV kemudian diguna dalam fasa kotak hitam sebagai alat bereksperimentasi dengan algoritma yang dipelajari pada awal fasa kotak putih. Pelajar boleh menguji terkaan yang dibuat melalui pengaplikasian algoritma dengan berbagai nilai input dan mengira hasil keputusan dengan tangan. Meskipun dapat menyelesai masalah seperti luas heksagon secara manual, namun kaedah sedemikian adalah membosankan. Keadaan seperti ini sering dihadapi untuk geometri yang lebih kompleks. Penggunaan ILMEV sebagai alat sokongan memudah proses ini kerana ILMEV mempunyai keupayaan melaksana pengiraan yang diperlu.

5.5 Kepelbagaian Perwakilan

Pemahaman matematik memerlukan pelajar memahami masalah yang ditulis dalam teks dan menulis penjelasan yang jelas dalam menerang jawapan mereka. Mereka juga perlu berkemampuan memahami hubungan antara fakta yang ditulis sebagai formula dan kuantiti plot geometri yang berkait dengan formula tersebut. Penyataan masalah pada permulaan

https://doi.org/10.17576/apjitm-2012-0101-05

bahagian 2 dan penyelesaian separa dalam Rajah 3 mengilustrasi keupayaan ILMEV membantu membangun kemahiran ini. Dalam ILMEV pelajar boleh menjelajahi simbolik, numerik, teks, grafik, bunyi, animasi dan perwakilan imej pegun. Rajah 3 mengilustrasi perwakilan objek geometri sebagai garisan yang mendefinisi sempadannya dan ketaksamaan yang mentakrif bahagian dalamannya. Adalah penting bagi pengguna membina pengetahuan mereka sendiri dengan menjelajahi kepelbagaian perwakilan tersebut (Heid, Helaian & Matras, 1990; Drijvers, 1997).

5.6 Teknik Langkah demi Langkah

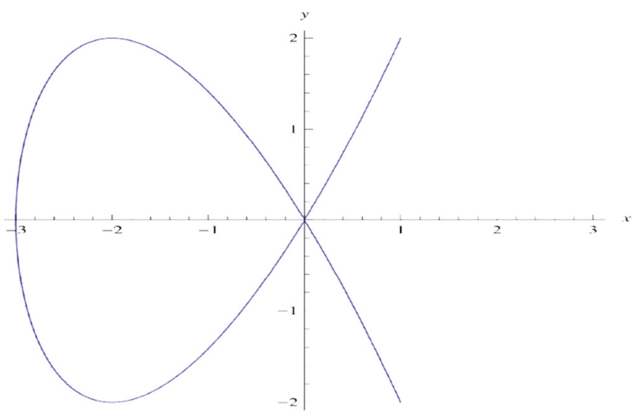
Arahan kepada ILMEV dipersembah dalam teknik langkah demi langkah seperti yang diilustrasi dalam Rajah 2. Sebagai contoh, pengguna menginput semua persamaan dan ketaksamaan dalam kotak dialog, dan kemudian ILMEV mempersembah langkah yang diperlu bagi mendapat penyelesaian berserta dengan beberapa cadangan. Pengguna berkuasa mengawal pelaksanaan langkah tertentu dalam urutan penyelesaian dengan mengklik pada butang tertentu (seperti "compute"), bagi menjalani sesuatu tugas. Oleh itu, sudah sewajarnya ILMEV menggalak penyelesaian masalah mengguna teknik langkah demi langkah dan menyedia penjelasan (Drijvers, 1997).

6. KAJIANTERKINI

Kajian versi terkini ILMEV menggambar bagaimana menyelesai masalah lanjutan yang biasanya ditemui dalam buku teks kalkulus. Lengkung tersirat:

$$f\,(x,y) = -x^2(2+x) + y^2 = 0$$

membentuk sempadan bagi sebuah rantau yang mempunyai luas terhingga. Dapatkan luas dan panjang perimeter rantau ini. Masalah pertama yang perlu diselesai ialah menvisualisasi sesuatu kawasan. Untuk itu, ILMEV diguna bagi memplot lengkung seperti yang ditunjuk pada Rajah 6. Kebanyakan pelajar memerlu beberapa percubaan bagi memperoleh julat yang sewajarnya bagi x dan y dalam mengambar kawasan. Pelajar perlu menukar nilai yang mendefinisi julat ke dalam empat kotak input.



Rajah 6: Lengkung Bersilang Sendiri

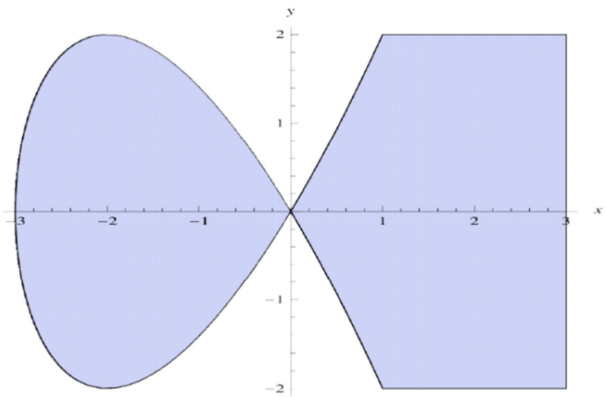
Daripada plot, pelajar boleh melihat titik (-2,0) berada bahagian dalaman bagi rantau terhingga ini. Penilaian terhadap $f\,(x,y)$ pada titik ini memberikan nilai -4. Oleh itu pelajar mungkin meneka bahawa kawasan terhingga diberioleh $f\,(x,y) \leq 0$, yang diplot dalam Rajah 7. Pada hakikatnya, pelajar memperoleh banyak maklumat dan perlu berfikir bagaimana menyingkir bahagian yang tidak terhingga daripada kawasan yang ditunjuk dalam rajah. Ini boleh dilakukan dengan menghad nilai x kepada nilai negatif, dengan itu pelajar menulis kawasan ini sebagai:

$$-x^2(2+x)+y^2 < 0 \wedge x < 0$$

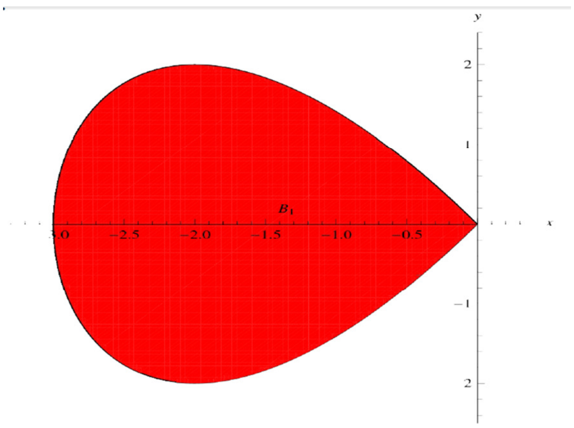
Pemplotan kawasan ini ditunjuk dalam Rajah 8. Penemuan penggambaran kawasan yang tepat dipermudah oleh antara muka ILMEV yang fleksibel yang mudah bagi menukar butiran plot. ILMEV memberi kamiran luas sebagai:

$$\int_{-3}^{0} \int_{-\sqrt{x^2(x+3)}}^{\sqrt{x^2\,(x+3)}} 1dydx$$

Versi terkini ILMEV juga boleh mengira panjang sempadan dan fluks vektor dan kerja kamiran terhadap sempadan kawasan ini (Wester, Yaacob & Steinberg, 2011).
Formula untuk kamiran tersebut adalah kompleks. Mengira kamiran tersebut secara manual, terutama bagi pelajar, adalah menjemukan dan mudah menghasil kesilapan.



Rajah 7: Kawasan



Rajah 8: Rantau dengan Luas Terhingga

7. KESIMPULAN

Tindak balas pelajar terhadap ILMEV dan cadangan daripada rakan menggalak pengkaji menyemak semula versi semasa ILMEV dengan ketara. Pengalaman pengkaji dengan antara muka menjurus kepada beberapa penambahbaikan. Sebagai contoh, semua persamaan polinomial dalam masalah yang diberi perlu diplot bersama-sama terlebih dahulu. Satu kemudahan yang membenar pelajar menilai polinomial pada titik yang dipilih oleh tetikus membantu pelajar memahami ketaksamaan polinomial tersebut. Seterusnya, ILMEV diperkembang supaya boleh mengendali kamiran sempadan dan versi multidimensi teorem kamiran bahagian demi bahagian (Wester, Yaacob & Steinberg, 2011).

PENGHARGAAN

Kajian ini dibiayai oleh geran IRPA 04-02-08-10005 (Kuliyyah Kejuruteraan, Universiti Islam Antarabangsa Malaysia) di bawah Kementerian Sains, Teknologi dan Inovasi (MOSTI), Malaysia. Kami juga ingin merakamkan penghargaan ikhlas kepada Azami Zaharin dan Nuryazmin Ahmat Zanuri dari Fakulti Kejuruteraan, Universiti Kebangsaan Malaysia kerana membantu dalam fasa pengujian pengguna.

Setinggi penghargaan kepada Nurul Saadah binti Zawawi sebagai pembantu penyelidik (RA) dari Fakulti Teknologi dan Sains Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia dalam membantu menterjemah manuskrip ini.

RUJUKAN:

Amrehein, B., Bengtsson, M. and Maeder, R. 1997.Visualizations for mathematics courses based on acomputer algebra system. *Journal of Symbolic Computation,* 23:447-452.

Buchberger, B. 1993.Teaching math by math software: Newton's method as an example of the white box/black box principle. Proceedings of the 2nd Krems Conference on Mathematics Education.Vienna: Donau-Universitat Krems.

Davis, B., Porta, H. and Uhl, J. 1999. *Vector calculus & Mathematica (VC&M) (computer program).* Ohio: Everywhere, Inc.

Davis, H. and Snider, A. 1995. *Introduction to vector analysis, 7th edition.* Boston: William C Brown Pub.

Drijvers, P. 1997. What issues do we need to know moreabout? Questions for future educational research concerning CAS In Berry J., Monaghan, J., Kronfellner, M. & Kutzler, B. (eds.) *The State of Computer Algebra in Mathematics Education.* Stockholm: Chartwell-Bratt (Publishing andTraining) Ltd.

Grabinger, R. 1996. *Rich environment for activelearning: A handbook of research for educational communications and technology.* New York: Macmillan Publication.

Guyer, T. 2008, Computer algebra systems as the mathematics teaching tool. *World Applied Sciences Journal,* 3(1):132-139.

Heid, M.K., Sheets, C. and Matras, M.A. 1990. Computer enhanced algebra: new roles and challenges for teachersand students. In Cooney, T. & Hirsch, C. (eds.).Teaching and Learning Mathematics in the 1990s (NCTM 1990 Yearbook). Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 205-211.

Heugl, H., Barzel, B. and Furukawa, A. 1997. The influence of computer algebra in the teaching and learning of mathematics, In Berry J., Monaghan, J., Kronfellner, M. &Kutzler, B. (eds.). *The State of Computer Algebra in Mathematics Education.* Stockholm: Chartwell-Bratt (Publishing and Training) Ltd.

Hong, H., Liska, R. and Steinberg, S. 1997. Logic, quantifiers, computer algebra and stability, *SIAM News*, 30(6):10.

Kutzler, B. 1994.DERIVE – The future of teaching mathematics. *The International DERIVE Journal*, 1(1):3-18.

Kutzler, B. 1998. *Solving linear equations with the TI-92 (experimental learning/visualization/scaffolding method).* Vienna: Bk Teachware Pub.

Kutzler, B. 2008. *Technology and the Yin & Yang of teaching and learning mathematics: the essence of using technology, in particular computer algebra systems (CAS), in education.* Vienna: B. Kutzler, Linz.

Leinbach, C., Aspetsberger, K., Barzel, B., Fuchs, K.,Furukawa, A., Heugl, H., Mann, G., Rothery, A., Sato, T.and Schweiger, F. 1997. The curriculum in a CAS environment.

In Berry J., Monaghan, J., Kronfellner, M. & Kutzler, B.(eds.), *The State of Computer Algebra in Mathematics Education.* Stockholm: Chartwell-Bratt (Publishing and Training) Ltd.

Reeves, T. 2006. Interactive. *Journal of Interactive Learning Research*. http://www.aace.org/pubs/jilr/scope.html [19 September 2006].

Tintarev, K. 2002. Design of user interface for computer-aided instruction of mathematics.

In Elaydi, S., Titi, E.S., Saleh, M., Abu-Saris, R.& Jain, S.K. (eds). Mathematics and Mathematical Education. *World Scientific Proceedings of the 3rd International Palestinian Conference on Mathematics and Mathematics Education.* Singapore: World Scientific: 291-305.

Tiwari, T. 2007. Computer graphics as an instructional aid in an introductory differential calculus course. *International Electronic Journal of Mathematics Education (IEJME)*, 2(1):32-48.

Wester, M., Yaacob, Y. and Steinberg, S. 2011. Computing integrals over polynomially defined regions and their boundaries in 2 and 3 dimensions. Mathematics and Computers in Simulation. *International Association Mathematics and Computer in Simulation*, 82(1):79-101.

Yaacob, Y. 2007. Interactive learning – Mathematica enhanced vector calculus (ILMEV), PhD Thesis, International Islamic University Malaysia, Malaysia.

Yaacob, Y., Steinberg, S., Wester, M., Ismail, A. and Salleh, H. 2008. ILMEV (Interactive learning – Mathematica enhanced vector calculus). *Proceedings of the Seminar Pendidikan Kejuruteraan dan Alam Bina (PEKA 2008).* Bangi: Faculty of Engineering, Universiti Kebangsaan Malaysia, 74-83.

Yasskin and Belmonte. 2003. *Vec_calc (computerprogram).* Texas: College Station, Texas A&M University.

NOTA BIOGRAFI:

Dr. Yuzita Yaacob adalah pensyarah kanan di Jabatan Teknologi dan Sains Maklumat, Universiti Kebangsaan Malaysia. Minat beliau adalah dalam penggunaan algebra komputer dalam pendidikan.
e-mel:yy@ftsm.ukm.my

Dr. Michael J. Wester adalah ahli matematik yang berkhidmat di University of New Mexico, Albuquerque, Amerika Syarikat dan pakar runding melalui syarikat beliau iaitu Cotopaxi. Beliau terlibat dalam bidang algebra komputer sejak tahun 1974.

Dr. Stanly Steinberg adalah Profesor Emeritus di Jabatan Matematik dan Statistik di University of New Mexico, Albuquerque, Amerika Syarikat. Beliau adalah pakar dalam pengkomputeran simbolik dan numerik dan pengaplikasiannya dalam mekanik kontinum dan transduksi isyarat dalam biologi sel.