Sains Malaysiana 55(4)(2026): 746-755
http://doi.org/10.17576/jsm-2026-5504-13

Kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-Turut Merah-Hitam Bagi Penentuan Harga Opsyen Asia Aritmetik

(A Red-Black Successive Over-Relaxation Method for Arithmetic Asian Option Pricing)

WEI SIN KOH[1,2], SAIFUL HAFIZAH JAAMAN[1,*], ROKIAH ROZITA AHMAD[1] & JUMAT SULAIMAN[3]

[1]*Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science and Technology, Universiti Kebangsaan Malaysia, 43600 UKM Bangi, Selangor, Malaysia*
[2]*Faculty of Business and Communications, INTI International University, 71800 Nilai, Negeri Sembilan, Malaysia*
[3]*Faculty of Science and Natural Resources, Universiti Malaysia Sabah, 88450 Kota Kinabalu, Sabah, Malaysia*

Diserahkan: 20 Mac 2026/Diterima: 17 April 2026

ABSTRAK

Penentuan harga opsyen Asia aritmetik merupakan masalah yang mencabar dalam matematik kewangan kerana tiada penyelesaian bentuk tertutup wujud. Dalam kajian ini, kaedah lelaran Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Merah–Hitam (RBSOR) dibangunkan untuk penyelesaian berangka bagi penentuan harga opsyen Asia aritmetik. Model penentuan harga yang ditadbir oleh persamaan pembezaan separa (PPS) Black–Scholes didiskretkan menggunakan Skema Beza Terhingga Crank–Nicolson yang menghasilkan suatu sistem persamaan linear. Seterusnya, kaedah lelaran RBSOR diaplikasikan untuk menyelesaikan sistem linear yang terhasil dengan cekap. Beberapa uji kaji berangka dijalankan dan keputusan yang diperoleh dibandingkan dengan kaedah lelaran Gauss–Seidel (GS), Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (SOR) dan Gauss–Seidel Merah–Hitam (RBGS). Prestasi penghitungan dinilai berdasarkan bilangan lelaran, masa penghitungan dan ralat punca min kuasa dua (RMSE). RMSE digunakan untuk menilai kejituan setiap kaedah lelaran melalui perbandingan antara keputusan kaedah berangka dan kaedah analisis. Keputusan kajian menunjukkan bahawa kaedah RBSOR mencapai kejituan yang setanding sambil mengurangkan bilangan lelaran dan masa penghitungan dengan ketara, sekali gus membuktikan kecekapan kaedah ini dalam penentuan harga opsyen secara berangka.

Kata kunci: Kaedah SOR Merah-Hitam; kecekapan sumber; opsyen Asia aritmetik; PPS Black Scholes; skema Crank-Nicolson

ABSTRACT

The valuation of arithmetic Asian options is a challenging problem in financial mathematics due to the absence of a closed-form solution. In this study, the Red–Black Successive Over-Relaxation (RBSOR) method is developed for the numerical solution of arithmetic Asian option pricing. The pricing model, governed by the Black–Scholes partial differential equation (PDE), is discretized using the Crank–Nicolson finite difference scheme, resulting in a system of linear equations. The RBSOR iterative method is then applied to efficiently solve the resulting linear system. Several numerical experiments are conducted, and the results are compared with those obtained using Gauss–Seidel (GS), Successive Over-Relaxation (SOR), and Red–Black Gauss–Seidel (RBGS) iterative methods. Computational performance is evaluated in terms of number of iterations, computational time, and root mean squared error (RMSE). RMSE is used to evaluate the accuracy of each iterative method by comparing the numerical results with the analytical solution. The findings demonstrate that the RBSOR method achieves comparable accuracy while significantly reducing iteration counts and computational time, indicating its computational efficiency for numerical option pricing.

Keywords: Arithmetic Asian option pricing; Black-Scholes PDE; Crank-Nicolson scheme; Red-Black SOR method; resource efficiency

PENGENALAN

Dalam kewangan kuantitatif, kaedah berangka sering digunakan untuk menyelesaikan model instrumen kewangan yang kompleks, seperti model penentuan harga opsyen, sekiranya penyelesaian bentuk tertutup tidak wujud atau penyelesaian analisis terlalu rumit untuk dilaksanakan. Kaedah penyelesaian secara berangka ini merangkumi pelbagai teknik, termasuk tetapi tidak terhad kepada kaedah beza terhingga, simulasi Monte Carlo dan alKhawarizmi pengoptimuman berangka.

Menurut Kola, Thulasiram dan Thulasiram (2009), masalah kerumitan pengiraan yang semakin meningkat

dalam industri kewangan menuntut penyelesaian yang boleh diurus, pantas dan penyelesaian masa-nyata dalam menyelesaikan masalah matematik yang kompleks seperti penentuan harga opsyen. Dengan ini, kajian dalam membangunkan kaedah berangka yang lebih cekap yang menyediakan penyelesaian yang tepat di samping meminimumkan kos pengiraan diperlukan. Opsyen adalah kontrak terbitan yang memberikan pemegangnya hak, tetapi bukan kewajipan, untuk membeli atau menjual aset asas, biasanya saham, pada harga yang ditetapkan, iaitu harga laksana, pada atau sebelum tempoh matang (Hull & Basu 2016). Opsyen panggilan memberi hak untuk membeli manakala opsyen jual memberi hak kepada pemegangnya untuk menjual. Lazimnya, opsyen Eropah dan Amerika merupakan opsyen vanilla. Variasi opsyen lain atau lebih dikenali sebagai opsyen eksotik adalah seperti opsyen Asia, opsyen Bermuda, Penghadang (*Barrier*) dan opsyen Imbas-kembali (*Lookback*).

Opsyen Asia ialah sejenis opsyen yang nilai ganjaran atau bayaran balik bergantung kepada purata harga aset asas selama tempoh hayat opsyen. Purata yang digunakan dalam opsyen Asia berbentuk purata aritmetik atau geometri. Penentuan harga opsyen Asia, khususnya opsyen Asia purata aritmetik, kekal sebagai satu masalah yang mencabar dalam matematik kewangan. Berbeza dengan opsyen Asia geometri, tiada penyelesaian bentuk tertutup wujud bagi opsyen Asia purata aritmetik (Gan, Wang & Yang 2020). Sepanjang tahun-tahun kebelakangan ini, beberapa pendekatan analitik dan berangka telah dicadangkan untuk menangani kesukaran ini.

Rogers dan Shi (1995) telah menjelmakan masalah penentuan nilai opsyen kepada penyelesaian persamaan pembezaan separa (PPS) jenis parabolik dalam dua pemboleh ubah daripada tertib kedua. Walau bagaimanapun, tiada penyelesaian analitik bagi PPS ini dan penyelesaian berangkanya kurang tepat. Mereka juga memperoleh formula had bawah bagi opsyen Asia dengan mengira jangkaan berdasarkan pemboleh ubah Gaussian dengan min sifar.

Elshegmani et al. (2011) menjelmakan PPS Black–Scholes bagi opsyen Asia menjadi persamaan haba dengan pekali malar dan memperoleh penyelesaian analitik. Kemudian, Elshegmani dan Ahmad (2013) menggunakan penjelmaan Laplace untuk menurunkan PDE tersebut menjadi persamaan pembezaan biasa dua dimensi (ODE), seterusnya memperoleh penyelesaian analitik bagi opsyen panggilan Asia aritmetik dengan harga pelaksanaan tetap.

Bagi penyelesaian berangka khususnya kaedah beza terhingga, Lee dan Chin (2010) menganggarkan PPS (1) dengan menggunakan skema Crank-Nicolson yang dipermudah dan diselesai menggunakan kaedah langsung. Skema Crank-Nicolson yang diguna adalah beza memusat untuk harga saham dan beza ke belakang untuk purata harga saham serta masa. Pada setiap titik penghitungan harga opsyen, satu stensil pengiraan empat titik terbentuk. Persamaan penghitungan ini boleh disusun sebagai sistem linear dan diselesaikan secara kaedah langsung. Selain itu, Koh et al. (2019) menggunakan skema Crank-Nicolson piawai dengan kedua-dua harga saham dan purata harga saham didiskretkan dengan skema beza memusat manakala tahap masa didiskretkan menggunakan skema beza ke belakang. Nod pengiraan enam titik terhasil mewakili setiap baris dalam sistem linear terhasil dan diselesaikan secara kaedah lelaran Gauss-Seidel (GS). Koh et al. (2023) membangunkan kaedah lelaran GS merah-hitam (RBGS) yang lebih cekap dari segi masa penghitungan dan bilangan lelaran berbanding kaedah GS dalam menyelesaikan sistem linear yang sama.

Berlandaskan kemajuan ini, kajian semasa memperkenalkan kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut Merah–Hitam (RBSOR). Dengan menggabungkan urutan merah–hitam dalam RBGS dengan sifat pemecutan kaedah Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (SOR), suatu pendekatan dicadangkan untuk meningkatkan lagi kadar penumpuan dan kecekapan pengiraan. Parameter pengenduran, ω, yang diperkenalkan dalam kaedah SOR dapat mengurangkan bilangan lelaran dengan ketara apabila dipilih secara optimum, sekali gus meningkatkan kecekapan pengiraan (Chapra & Canale 2020). Kaedah lelaran seperti GS dan SOR sememangnya diperkenalkan untuk meningkatkan kadar penumpuan dalam penyelesaian sistem linear berskala besar (Young 1971).

Selain itu, kajian oleh Zhang (1996) menunjukkan bahawa kaedah Gauss-Seidel Merah Hitam (RBGS) boleh dipercepatkan dengan ketara dalam konteks persamaan pembezaan separa. Ini menunjukkan bahawa pendekatan berasaskan struktur merah–hitam mempunyai potensi untuk dipertingkatkan melalui teknik pemecutan tambahan. Kaedah RBSOR pula diperkenalkan oleh Yavneh (1996) dan telah berjaya diaplikasikan dalam pelbagai bidang penghitungan dan kejuruteraan, seperti dinamik bendalir (Liu et al. 2011), aliran optik (Johnson, Thomas & Sheba 2020) dan pemprosesan grafik (Li, Gong & Xu 2020). Berasaskan kejayaan tersebut, kajian ini mengaplikasikan kaedah RBSOR dalam penentuan harga berangka bagi opsyen Asia purata aritmetik dengan tujuan meningkatkan kecekapan pengiraan dan ketepatan. Walaupun analisis kestabilan von Neumann bagi skema Crank–Nicolson yang serupa telah dibincangkan dalam kajian terdahulu (Koh et al. 2023), fokus kajian ini adalah terhadap pembangunan dan penilaian prestasi kaedah lelaran RBSOR bagi penentuan harga opsyen.

Walaupun kemajuan telah dicapai dalam kajian terdahulu, aplikasi kaedah RBSOR dalam penentuan harga opsyen Asia aritmetik masih belum diterokai. Oleh itu, kajian ini bertujuan mengisi jurang penyelidikan tersebut dengan mengkaji aplikasi kaedah lelaran RBSOR dalam penentuan harga opsyen Asia. Prestasi kaedah lelaran RBSOR seterusnya dinilai melalui perbandingan dengan kaedah lelaran sedia ada, iaitu Gauss–Seidel (GS), Pengenduran Berlebihan Berturut-turut (SOR) dan Gauss–Seidel Merah–Hitam (RBGS) dari segi kecekapan dan kejituan.

Berbeza dengan kaedah RBGS yang hanya menggunakan pengemaskinian berstruktur, kaedah RBSOR memperkenalkan parameter pengenduran berlebihan, ω, yang berupaya mempercepatkan kadar penumpuan. Oleh itu, kaedah ini bukan sekadar lanjutan kaedah sedia ada, tetapi merupakan satu penambahbaikan berstruktur yang meningkatkan kecekapan pengiraan tanpa menjejaskan kejituan penyelesaian.

Kertas kerja ini disusun seperti berikut: Bahagian 2 membincangkan perumusan model matematik bagi penentuan harga opsyen Asia aritmetik. Bahagian 3 menghuraikan penerbitan skema beza terhingga Crank–Nicolson serta pembangunan kaedah RBSOR untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang terhasil. Keputusan berangka dibentangkan dalam Bahagian 4, diikuti dengan kesimpulan dalam Bahagian 5.

PEMODELAN MATEMATIK

Bahagian ini membentangkan perumusan matematik bagi masalah penentuan harga opsyen Asia aritmetik. Pertimbangkan suatu aset sandaran, iaitu harga saham, $S(t)$, yang mengikuti gerakan Brown geometri, yang ditadbir oleh persamaan pembezaan stokastik berikut,

$$dS(t) = \mu S dt + \sigma S dW, \tag{1}$$

dengan μ ialah kadar hanyutan; σ ialah kemeruapan harga saham; dan W ialah gerakan Brown piawai. Andaikan A mewakili kamiran terkumpul bagi harga saham, S, sehingga masa t, seperti berikut,

$$A = \int_0^t S(u)\,du. \tag{2}$$

Maka,

$$dA = S dt. \tag{3}$$

Dengan menerapkan Lemma Itô, fungsi pembezaan bagi nilai opsyen, $V(S, A, T)$ boleh dinyatakan sebagai

$$dV(S,A,t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2 \partial^2 V}{2dS^2}\right)dt + \frac{\partial V}{dS}dS + \frac{\partial V}{dA}dA. \tag{4}$$

Seterusnya, persamaan (1) dan (3) digantikan ke dalam persamaan (4), menghasilkan

$$dV(S,A,t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2 \partial^2 V}{2dS^2}\right)dt + \frac{\partial V}{dS}(\mu S dt + \sigma S dW) + \frac{\partial V}{dA}S dt. \tag{5}$$

Dengan menyusun semula ungkapan dalam persamaan (5) diperoleh

$$dV(S,A,t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2 \partial^2 V}{2dS^2} + \mu S\frac{\partial V}{dS} + S\frac{\partial V}{dA}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{dS}dW. \tag{6}$$

Pertimbangkan suatu portfolio, Π, yang terdiri daripada suatu opsyen Asia dan sejumlah ($-\Delta$) unit aset sandaran, pada masa t diberikan oleh,

$$\Pi = V(S,A,t) - \Delta S. \tag{7}$$

Pembezaan bagi portfolio (7) ialah

$$d\Pi = dV(S,A,t) - \Delta dS. \tag{8}$$

Dengan menggantikan pembezaan Itô bagi V dalam (6) serta dinamik S dalam (1) ke dalam
persamaan (8) menghasilkan

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2 \partial^2 V}{2dS^2} + \mu S\frac{\partial V}{dS} + S\frac{\partial V}{dA} - \Delta\mu S\right)dt + \sigma S\left(\frac{\partial V}{dS} - \Delta\right)dW. \tag{9}$$

Portmilih $\Delta = \frac{\partial V}{dS}$, yang menyingkirkan sebutan stokastik dW, sekali gus menjadikan portfolio bebas risiko. Maka,

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2 \partial^2 V}{2dS^2} + S\frac{\partial V}{dA}\right)dt. \tag{10}$$

Oleh kerana portfolio tersebut adalah bebas risiko, perubahan dalam portfolio menjana kadar faedah bebas risiko, r, dengan

$$d\prod = r\prod dt. \tag{11}$$

Persamaan (10) dibandingkan dengan persamaan (11) menghasilkan

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2 \partial^2 V}{2dS^2} + S\frac{\partial V}{dA}\right)dt = r\Pi dt. \tag{12}$$

Dengan menggantikan persamaan (7) ke dalam persamaan (12) diperoleh

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2 \partial^2 V}{2dS^2} + S\frac{\partial V}{dA}\right)dt = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt. \tag{13}$$

Penyusunan semula sebutan dalam persamaan (13) menghasilkan

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2\partial^2 V}{2dS^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+S\frac{\partial V}{dA}-rV=0\cdot \qquad (14)$$

Persamaan (14) adalah PPS Black-Scholes yang mentadbir opsyen Asia aritmetik.

Fungsi bayaran, yang merupakan syarat terminal, diberikan seperti berikut (Elshegmani & Ahmad 2013; Lee & Chin 2010):

$V(S, A_T, T) = \text{maks}\left(\frac{A_T}{T}-K, 0\right)$ untuk opsyen panggilan harga laksana tetap,

$V(S, A_T, T) = \text{maks}\left(K-\frac{A_T}{T}, 0\right)$ untuk opsyen jual harga laksana tetap,

dengan K adalah harga laksana.

Selain syarat terminal, syarat sempadan dikenakan bagi memastikan masalah yang ditakrifkan adalah tersusun dengan baik. Bagi opsyen panggilan Asia aritmetik dengan harga laksana tetap, syarat sempadan ditakrifkan seperti berikut (Lee & Chin 2010):

$$V(0,A,t)=e^{-r(T-t)}\text{maks}\left(\frac{A}{T}-K,0\right),$$

$$V(S_{\text{maks}},A,t)=e^{-r(T-t)}\left(\frac{A}{T}-K\right)+\frac{S_{\text{maks}}}{rT}\left(1-e^{-r(T-t)}\right).$$

Sementara itu, syarat sempadan opsyen jual Asia aritmetik dengan harga laksana tetap diberi oleh (Lee & Chin 2010):

$$V(0,A,t)=e^{-r(T-t)}\text{maks}\left(K-\frac{A}{T},0\right),$$

$$V(S_{\text{maks}}, A, t)=0.$$

Seterusnya, apabila $A = 0$, nilai opsyen berkurang kepada opsyen gaya Eropah piawai, manakala apabila A menghampiri nilai maksimum, nilai opsyen menghampiri nilai intrinsiknya.

BAHAN DAN KAEDAH

Dalam bahagian ini, PPS Black–Scholes dalam persamaan (14) didiskretkan menggunakan skema beza terhingga Crank–Nicolson. Pendekatan bagi pembezaan ruang dan masa diterbitkan dengan menghasilkan suatu sistem persamaan linear pada setiap tahap masa. Sistem linear yang terhasil kemudian diselesaikan menggunakan kaedah lelaran RBSOR yang dicadangkan.

SKEMA BEZA TERHINGGA CRANK-NICOLSON

Skema beza terhingga Crank-Nicolson menggabungkan unsur skema tersirat dan tak tersirat dengan mengambil purata penyelesaian tersirat dan tak tersirat. PPS Black-Scholes untuk opysen Asia dalam persamaan (14) boleh didiskret untuk menghasilkan

$$\begin{aligned}&\frac{V_{i,j,k+1}-V_{i,j,k}}{\Delta t}+\frac{\sigma^2 S_i^2}{2}\left(\frac{V_{i-1,j,k+1}-2V_{i,j,k+1}+V_{i+1,j,k+1}+V_{i-1,j,k}-2V_{i,j,k}+V_{i+1,j,k}}{2\Delta S^2}\right)\\&+rS_i\left(\frac{V_{i+1,j,k+1}-V_{i-1,j,k+1}+V_{i+1,j,k}-V_{i-1,j,k}}{4\Delta S}\right)+S_i\left(\frac{V_{i,j+1,k+1}-V_{i,j-1,k+1}+V_{i,j+1,k}-V_{i,j-1,k}}{4\Delta A}\right)\\&-r\left(\frac{V_{i,j,k+1}+V_{i,j,k}}{2}\right)=0\end{aligned} \qquad (15)$$

Seterusnya, persamaan (15) dipermudah bagi memperoleh

$$\begin{aligned}&V_{i,j,k+1}-V_{i,j,k}+\alpha_i\left(V_{i-1,j,k+1}-2V_{i,j,k+1}+V_{i+1,j,k+1}+V_{i-1,j,k}-2V_{i,j,k}+V_{i+1,j,k}\right)\\&+\beta_i\left(V_{i+1,j,k+1}-V_{i-1,j,k+1}+V_{i+1,j,k}-V_{i-1,j,k}\right)+\gamma_i\left(V_{i,j+1,k+1}-V_{i,j-1,k+1}+V_{i,j+1,k}-V_{i,j-1,k}\right)\\&+\theta\left(V_{i,j,k+1}+V_{i,j,k}\right)=0\end{aligned} \qquad (16)$$

dengan $\alpha_i=\frac{\Delta t\sigma^2 S_i^2}{4\Delta S^2}$, $\beta_i=\frac{\Delta t r S_i}{4\Delta S}$, $\gamma_i=\frac{\Delta t S_i}{4\Delta A}$, $\theta=-\frac{\Delta t r}{2}$.

Setelah persamaan (16) disusun, suatu sistem persamaan linear diperoleh, iaitu

$$a_i V_{i-1,j,k}+b_i V_{i+1,j,k}-c_i V_{i,j-1,k}+c_i V_{i,j+1,k}+V_{i,j,k}=F_{i,j,k+1} \qquad (17)$$

dengan $a_i=\frac{\alpha_i-\beta_i}{d_i}$, $b_i=\frac{\alpha_i+\beta_i}{d_i}$, $c_i=\frac{\gamma_i}{d_i}$, $F_{i,j,k+1}=\frac{f_{i,j,k+1}}{d_i}$, $d_i=-1-2\alpha_i+\theta$,

$$f_{i,j,k+1}=(\beta_i-\alpha_i)V_{i-1,j,k+1}-(\beta_i+\alpha_i)V_{i+1,j,k+1}+\gamma_i V_{i,j-1,k+1}-\gamma_i V_{i,j+1,k+1}+(-1+2\alpha_i-\theta)V_{i,j,k+1},$$

dengan i, j dan k masing-masing mewakili paksi nod untuk harga saham, S, A dan t, pada grid beza terhingga.

Sistem persamaan linear yang terjana daripada proses pendiskretan boleh diperihalkan sebagai nod lima titik untuk setiap penghitungan V pada setiap aras masa, k dalam grid penghitungan seperti Rajah 1.

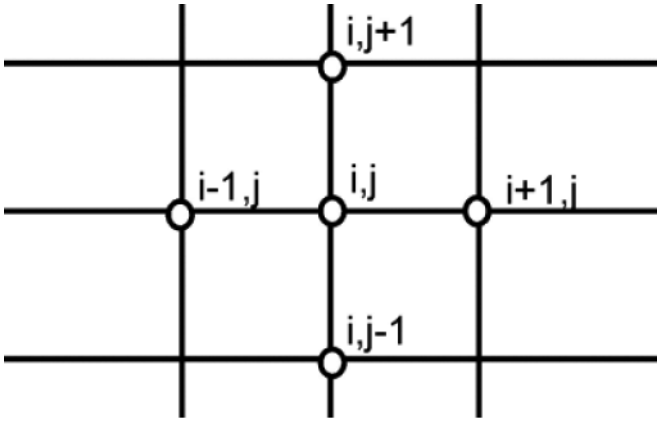
KAEDAH PENGENDURAN BERLEBIHAN

BERTURUT-TURUT MERAH-HITAM

Sistem persamaan linear (17) menghasilkan jujukan sistem linear pada setiap aras masa, k, dalam bentuk,

$$B\mathrm{V}_k = \mathrm{F}_{k+1} \qquad (18)$$

dengan B adalah matriks pekali penta-pepenjuru, F adalah vektor lajur yang diketahui, yang dihitung pada masa k+1 dan V adalah vektor lajur yang tidak diketahui, iaitu harga opsyen pada aras masa k.



RAJAH 1. Nod penghitungan bagi setiap aras masa, k

Disebabkan saiz pekali matriks B yang besar dan struktur jarang, penyelesaian sistem menggunakan kaedah langsung boleh menjadi mahal dari segi penghitungan. Oleh itu, kaedah lelaran biasanya digunakan untuk mendapatkan penyelesaian berangka dengan cekap. Penyelesaian berangka dijalankan secara ke belakang bermula dari syarat terminal sehingga aras masa, $k = 0$. Pada setiap tahap masa, sistem persamaan linear seperti persamaan (18) diselesaikan menggunakan kaedah lelaran pengenduran berlebihan berturut-turut merah-hitam (RBSOR). Kaedah RBSOR menggabungkan penghitungan urutan silih berganti merah-hitam dan kaedah SOR. Kaedah SOR melibatkan pencarian parameter yang dapat memberikan bilangan lelaran yang optimum. Grid urutan merah-hitam berbeza dengan grid penghitungan beza terhingga piawai, seperti yang digambarkan pada Rajah 2 dan 3.

Strategi urutan merah–hitam seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 3 mampu meningkatkan kecekapan pengiraan dan amat bermanfaat untuk pelaksanaan secara selari, kerana kemaskinian bagi nod dengan warna yang sama boleh dijalankan secara serentak. Proses penghitungan kaedah RBSOR bagi menentukan nilai opsyen, V, pada setiap tahap masa k, ditunjukkan dalam AlKhwarizmi 1.

ALKHWARIZMI 1 (KAEDAH RBSOR)

Langkah 1: Tetapkan semua parameter, syarat sempadan, syarat terminal dan lelaran, $h = 0$.
Langkah 2: Lelaran:

a. Penghitungan lelaran titik merah
Untuk ($j = 1; j \le m - 1; j = +$)
Untuk ($i = (j\%2) + 1; i \le m - 1; i = i + 2$)

$$V_{i,j}^{(h+1)} = (1-\omega)V_{i,j}^{(h)} + \omega\left(F_{i,j} - a_i V_{i-1,j}^{(h+1)} - b_i V_{i+1,j}^{(h)} + c_i V_{i,j-1}^{(h+1)} - c_i V_{i,j+1}^{(h)}\right)$$

b. Penghitungan lelaran titk hitam
Untuk ($j = 1; j \le m - 1; j = +$)
Untuk ($i = 2 - (j\%2); i \le m - 1; i = i + 2$)

$$V_{i,j}^{(h+1)} = (1-\omega)V_{i,j}^{(h)} + \omega\left(F_{i,j} - a_i V_{i-1,j}^{(h+1)} - b_i V_{i+1,j}^{(h)} + c_i V_{i,j-1}^{(h+1)} - c_i V_{i,j+1}^{(h)}\right)$$

Langkah 3: Semakan kriteria penumpuan:

$$\left|V_{i,j}^{(h+1)} - V_{i,j}^{(h)}\right| < \varepsilon$$

Jika kriteria penumpuan dipenuhi, lelaran berhenti.
Sebaliknya, tetapkan $h = h + 1$ dan ulang Langkah 3.

Langkah 4: Nilai opsyen pada tahap masa k, .

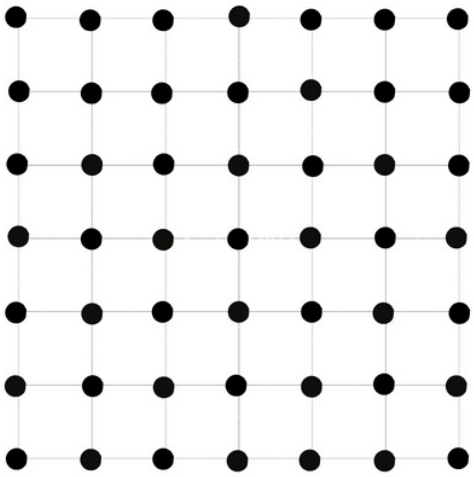
$$V_{i,j,k} = V_{i,j}^{(h+1)}$$

HASIL DAN PERBINCANGAN

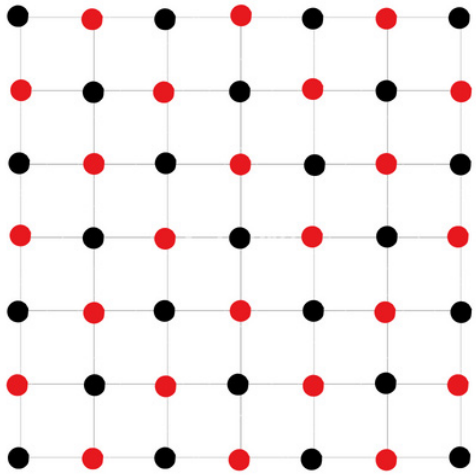
Dua uji kaji dijalankan bagi menguji prestasi kaedah lelaran RBSOR dalam menyelesaikan penentuan harga opsyen Asia aritmetik. Kecekapan kaedah yang dicadangkan dibandingkan dengan beberapa kaedah lelaran sedia ada, iaitu kaedah GS, SOR dan RBGS. Dalam uji kaji ini, bilangan lelaran, masa lelaran dan ralat punca min kuasa dua (RMSE) diukur. RMSE dikira dengan membandingkan kaedah berangka dengan kaedah analisis daripada Elshegmani dan Ahmad (2013). Di samping itu, kriteria penumpuan bagi semua kaedah lelaran yang diuji ditentukan menggunakan toleransi ralat, $\varepsilon = 10^{-10}$. Penyelesaian berangka ini diuji menerusi beberapa saiz matriks, iaitu 100, 150, 200, 250 dan 300.

UJI KAJI 1

Uji kaji 1 dijalankan dengan menggunakan data opsyen Asia aritmetik panggilan daripada Elshegmani (2013), iaitu $K = 90$, $r = 0.9$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$(tahun) dan $S_{maks} = 500$. Keputusan berangka untuk uji kaji 1 direkodkan dalam Jadual 1 serta diperihalkan dalam Rajah 5 dan 6. Dapat diperhatikan dalam Jadual 1, Rajah 5 dan 6, bahawa kaedah RBSOR mencatatkan bilangan lelaran yang terendah dan masa penghitungan yang tercepat antara semua kaedah lelaran yang diuji. Kejituan untuk kesemua kaedah adalah setara seperti yang dipaparkan dalam Jadual 1.



RAJAH 2. Grid penghitungan piawai



RAJAH 3. Grid penghitungan merah-hitam

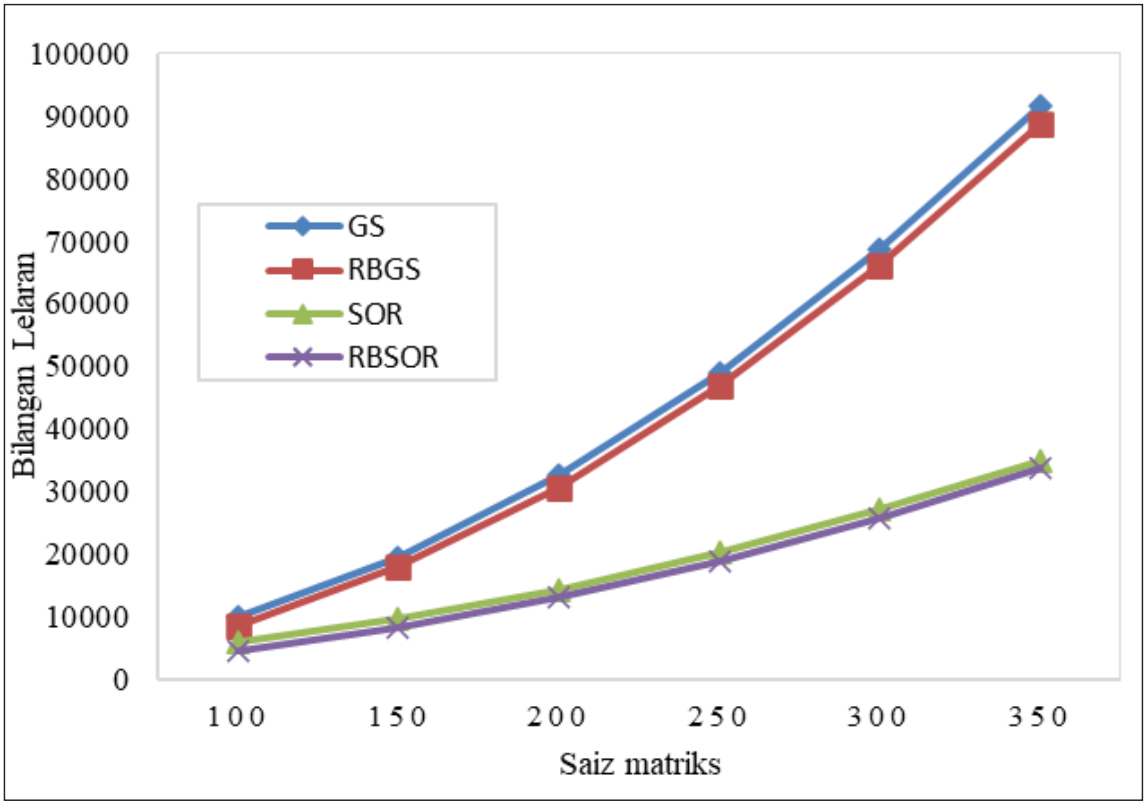
UJI KAJI 2

Data uji kaji 2 diambil daripada Lee dan Chin (2010), iaitu opsyen Asia aritmetik panggilan dengan $K = 7$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$(tahun), $S_{\max} = 500$ dengan nilai permulaan $S_0 = 10$ dan $A_0 = 7$. Jadual 2, Rajah 6 dan 7 memaparkan keputusan berangka untuk uji kaji 2. Seperti uji kaji 1, keputusan uji kaji 2 juga melaporkan bilangan lelaran yang paling rendah dan masa penghitungan yang terpantas dicapai oleh kaedah RBSOR. Dari segi kejituan, semua kaedah merekodkan RMSE yang tekal.

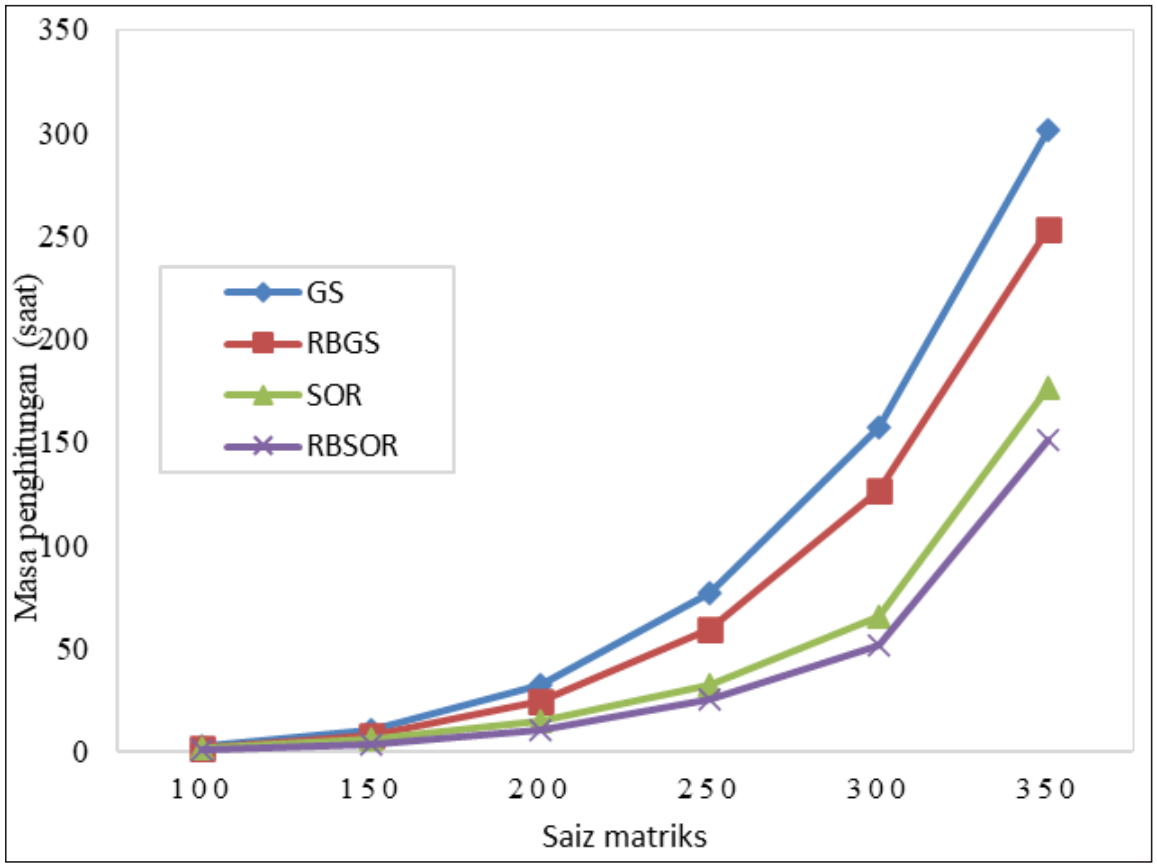
Bagi kedua-dua uji kaji, bilangan lelaran dan masa perhitungan memihak kepada kaedah RBSOR. Kecekapan kaedah ini dipengaruhi oleh pemilihan parameter pemberat, ω, yang optimum serta penghitungan urutan merah-hitam yang mempercepatkan kadar penumpuan. Dengan menggunakan saiz matriks yang berbeza, kajian ini memantau perubahan bilangan lelaran dan masa perhitungan apabila dimensi masalah meningkat. Perbezaan ketara dapat diperhatikan bagi matriks bersaiz lebih besar. Walau bagaimanapun, nilai RMSE bagi saiz matriks yang sama menunjukkan nilai yang hampir sama antara semua kaedah lelaran. Hal ini berlaku kerana kaedah lelaran yang digunakan untuk menyelesaikan sistem linear yang terjana, iaitu persamaan (5), tidak mempengaruhi kejituan hasil. Hasil uji kaji menunjukkan bahawa kaedah RBSOR mengatasi kaedah GS, SOR dan RBGS dari segi kecekapan pengiraan, dengan pengurangan yang ketara dalam bilangan lelaran dan masa penghitungan.

JADUAL 1. Keputusan berangka uji kaji 1

Saiz matriks	100	150	200	250	300	350
Kaedah	Bilangan lelaran					
GS	9793	19485	32594	49035	68744	91665
RBGS	8589	17943	30693	46790	66182	88811
SOR	5914	9600	14353	20129	26989	34782
RBSOR	4600	8200	12964	18700	25612	33564
Kaedah	Masa penghitungan (saat)					
GS	2.48	10.73	32.07	76.76	157.61	301.19
RBGS	1.77	7.82	24.34	59.73	126.55	253.46
SOR	1.63	5.68	14.90	32.33	65.07	176.23
RBSOR	0.87	3.70	10.50	25.00	51.07	150.72
Kaedaah	RMSE					
GS	2.4831E-06	1.6441E-06	1.2283E-06	9.8106E-07	8.1643E-07	6.9912E-07
RBGS	2.4831E-06	1.6441E-06	1.2288E-06	9.8107E-07	8.1644E-07	6.9913E-07
SOR	2.4831E-06	1.6441E-06	1.2289E-06	9.8108E-07	8.1647E-07	6.9915E-07
RBSOR	2.4832E-06	1.6441E-06	1.2289E-06	9.8109E-07	8.1647E-07	6.9915E-07



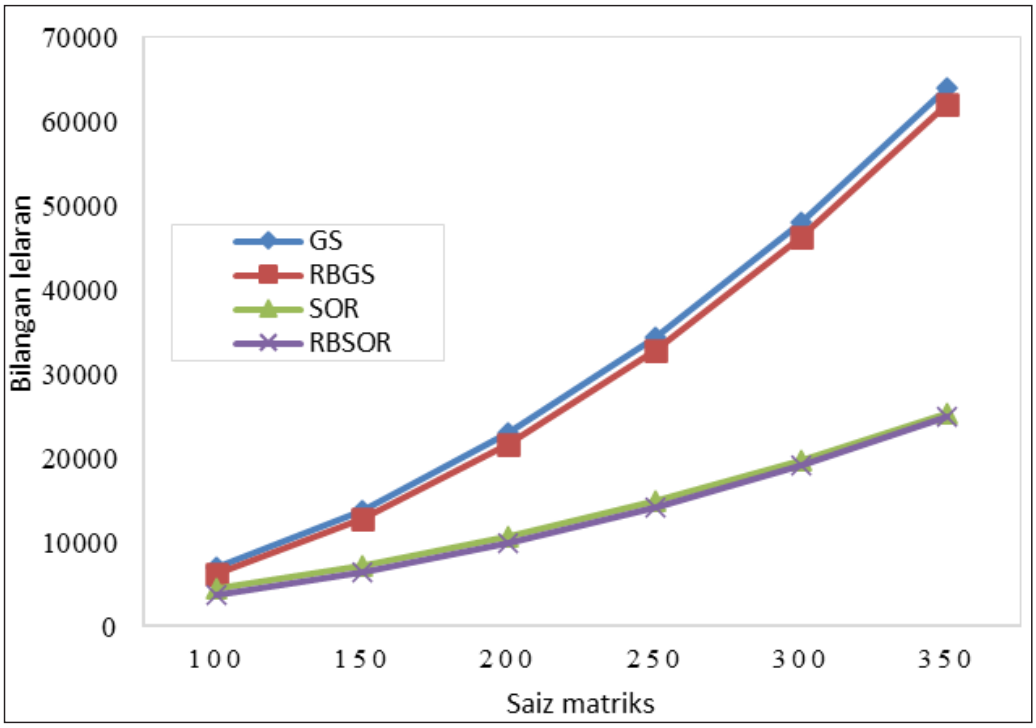
RAJAH 4. Bilangan lelaran lawan saiz matriks bagi uji kaji 1



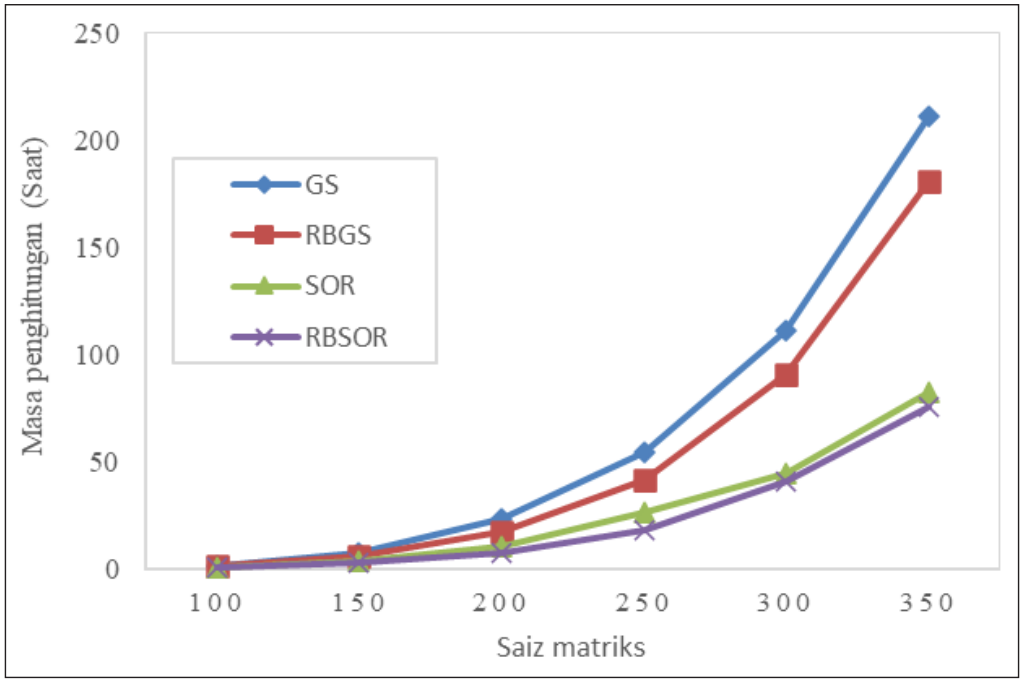
RAJAH 5. Masa penghitungan lawan saiz matriks bagi uji kaji 1

JADUAL 2. Keputusan penghitungan uji kaji 2

Saiz matriks	100	150	200	250	300	350
Kaedah			Bilangan lelaran			
GS	7083	13812	22917	34344	48052	64006
RBGS	6210	12700	21576	32765	46271	61998
SOR	4581	7267	10673	14833	19732	25344
RBSOR	3673	6343	9803	14025	19046	24820
Kaedah			Masa penghitungan (saat)			
GS	1.99	7.93	23.36	54.29	111.55	210.79
RBGS	1.48	6.14	17.41	41.73	90.50	180.97
SOR	1.14	3.99	10.74	26.62	44.85	82.82
RBSOR	0.70	2.81	8.04	18.16	41.25	75.62
Kaedah			RMSE			
GS	6.1139E-07	4.0493E-07	3.0270E-07	2.4167E-07	2.0112E-07	1.7222E-07
RBGS	6.1140E-07	4.0494E-07	3.0270E-07	2.4168E-07	2.0113E-07	1.7223E-07
SOR	6.1140E-07	4.0495E-07	3.0271E-07	2.4169E-07	2.0114E-07	1.7224E-07
RBSOR	6.1141E-0	4.0495E-07	3.021E-07	2.4169E-07	2.114E-07	1.7224E-07



RAJAH 6. Bilangan lelaran lawan saiz matriks bagi uji kaji 2



RAJAH 7. Masa penghitungan lawan saiz matriks bagi uji kaji 2

KESIMPULAN

Kaedah RBSOR telah dibangunkan untuk menyelesaikan masalah penentuan harga opsyen Asia aritmetik. Dua uji kaji berangka memperlihatkan kecekapan kaedah RBSOR yang berjaya mengurangkan bilangan lelaran serta mempercepatkan masa penghitungan berbanding kaedah sedia ada iaitu kaedah GS, RBGS dan SOR. Kejituan kaedah RBSOR pula adalah setanding dengan kaedah lain yang dikaji dengan nilai RMSE yang kecil dan setara sebagaimana yang dibentangkan dalam Jadual 1 dan 2. Gabungan penghitungan urutan merah-hitam dan kaedah SOR terbukti dapat mengurangkan beban penghitungan serta meningkatkan kadar penumpuan. Kelebihan utama kaedah RBSOR adalah keupayaannya untuk menggabungkan struktur pengiraan merah–hitam dengan teknik pengenduran berlebihan yang membolehkan pengemaskinian nod secara selari serta mempercepatkan kadar penumpuan. Berbanding kaedah GS dan SOR piawai, kaedah ini mengurangkan bilangan lelaran dan masa penghitungan, manakala berbanding kaedah RBGS, ia memberikan penambahbaikan tambahan melalui penggunaan parameter pengenduran berlebihan, ω. Kesimpulannya, kaedah RBSOR memberikan kaedah yang cekap dan mantap dalam menentukan harga opsyen Asia aritmetik. Kajian masa depan boleh mengembangkan aplikasi kaedah RBSOR kepada model penentuan harga opsyen yang lebih kompleks, contohnya yang melibatkan model persamaan pembezaan separa pecahan (Riaz et al. 2023).

RUJUKAN

Chapra, S. & Canale, R. 2020 *Numerical Methods for Engineers.* 8th ed. New York: McGaw-Hill.

Elshegmani, Z.A. 2013. Analytical solution of the arithmetic Asian option partial differential equation using several transformation methods. Tesis PhD, Universiti Kebangsaan Malaysia (tidak diterbitkan).

Elshegmani, Z.A. & Ahmad, R.R. 2013. Solving an Asian option PDE via the laplace transform. *ScienceAsia* 39(1): 67-69.

Elshegmani, Z.A., Ahmad, R.R., Jaaman, S.H. & Zakaria, R.H. 2011. Transforming arithmetic Asian option PDE to the parabolic equation with constant coefficients. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2011*.

Gan, L., Wang, H. & Yang, Z. 2020. Machine learning solutions to challenges in finance: An application to the pricing of financial products. *Technological Forecasting and Social Change* 153: 119928.

Hull, J.C. & Basu, S. 2016. *Options, Futures, and Other Derivatives*. Bengaluru: Pearson Education India.

Johnson, B., Thomas, S. & Sheeba, R.J. 2020. A high-performance dense optical flow architecture based on Red-Black SOR solver. *Journal of Signal Processing Systems* 92: 357-373.

Koh, W.S., Ahmad, R.R., Jaaman, S.H. & Sulaiman, J. 2019. Pricing Asian option by solving Black–Scholes PDE using Gauss–Seidel method. *Proceedings of the Third International Conference on Computing, Mathematics and Statistics (iCMS2017) Transcending Boundaries, Embracing Multidisciplinary Diversities*. Springer Singapore. hlm. 147-152.

Koh, W.S., Ahmad, R.R., Jaaman, S.H. & Sulaiman, J. 2023. Development of Red-Black Gauss-Seidel algorithm for efficiently pricing fixed strike Asian options based on arithmetic average. *International Journal of Engineering Trends and Technology* 71(11): 181-189.

Kola, K., Thulasiram, R.K. & Thulasiraman, P. 2009. A software architecture framework for on-line option pricing. *The Journal of Supercomputing* 47: 146-170.

Lee, T.Y. & Chin, S.T. 2010. A simple crank-Nicolson scheme for Asian option. *The 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistics and its Applications (ICMSA2010), Kuala Lumpur, Malaysia, 3-4 November 2010*. hlm. 381-394.

Liu, J.T., Ma, Z.S., Li, S.H. & Zhao, Y. 2011. A GPU accelerated Red-Black SOR algorithm for computational fluid dynamics problems. *Advanced Materials Research* 320: 335-340.

Li, R., Gong, L. & Xu, M. 2020. A heterogeneous parallel Red-Black SOR technique and the numerical study on SIMPLE. *The Journal of Supercomputing* 76: 9585-9608.

Rogers, L.C.G. & Shi, Z. 1995. The value of an Asian option. *Journal of Applied Probability* 32(4): 1077-1088.

Riaz, M.B., Ansari, A.R., Jhangeer, A., Imran, M. & Chan, C.K. 2023. The fractional soliton wave propagation of non-linear volatility and option pricing systems with a sensitive demonstration. *Fractal and Fractional* 7(11): 809.

Yavneh, I. 1996. On red-black SOR smoothing in multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing* 17(1): 180-192.

Young, D.M. 1971. *Iterative Solution of Large Linear Systems*. New York: Academic Press.

Zhang, J. 1996. Acceleration of five-point red-black Gauss–Seidel in multigrid for poisson equation. *Applied Mathematics and Computation* 80(1): 73-93.

*Pengarang untuk surat-menyurat; email: shj@ukm.edu.my