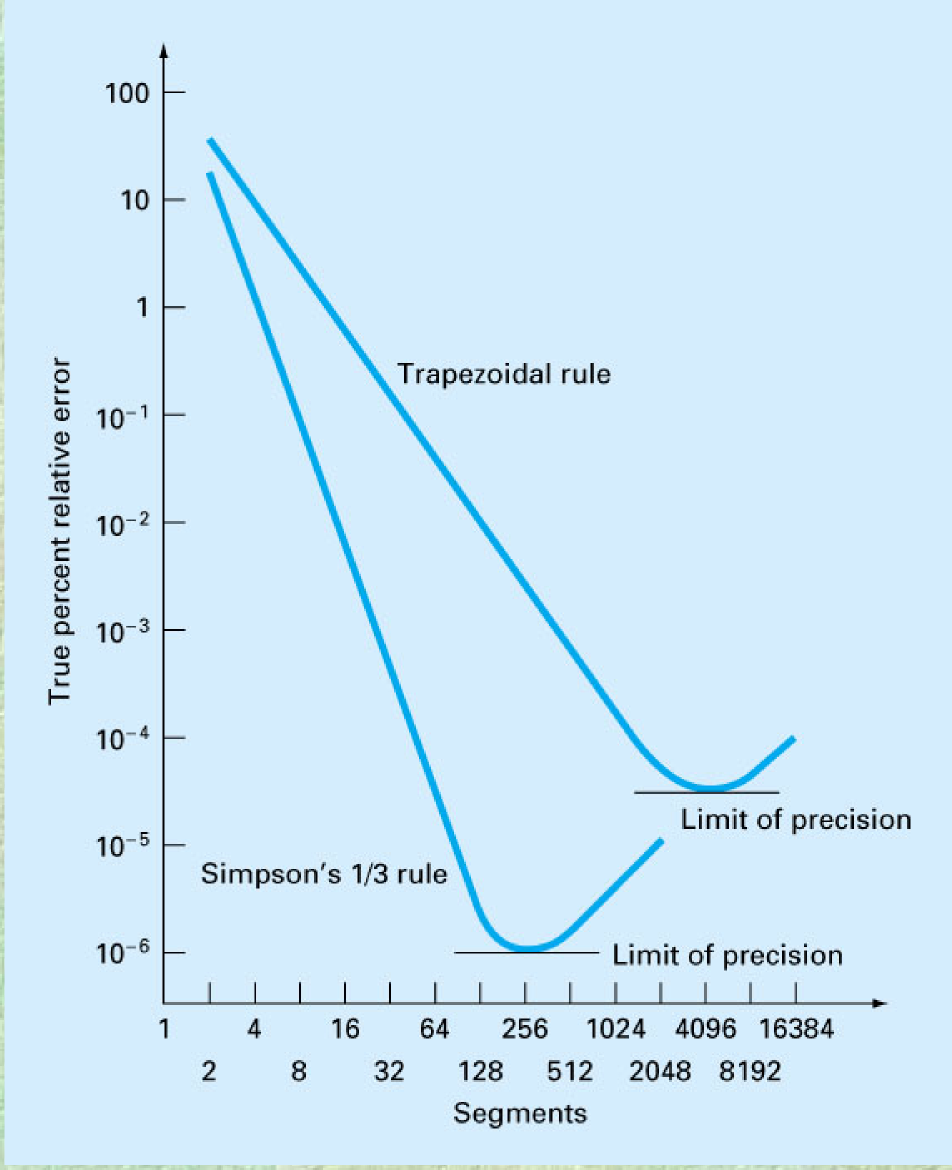
Kamiran Persamaan-persamaan

Bab 22

Di akhir bab ini, anda sepatutnya:

- faham asas bagi teori Ekstrapolasi Richardson dan bagaimana ia digunakan ke atas algoritma Romberg dan pembezaan secara berangkanya
- Dapat membezakan di antara formula Newton-Cotes dan kuadratur Gauss
- mengetahui mengapa kamiran Romberg dan kuadratur Gauss mudah digunakan apabila persaman-persamaan dikamirkan berbanding pada taburan data atau data diskrit

Mengapa perlu pada kaedah lain?



Kamiran Romberg

Ekstrapolasi Richardson

- Menggunakan 2 nilai anggaran kamiran untuk mengira anggaran ketiga yang lebih jitu
- Nilai anggaran dan ralat bagi hukum trapezoid berbilang-aplikasi adalah:

ralat

$$I = I(h) + E(h)$$

nilai sebenar kamiran

nilai anggaran bagi
bagi aplikasi n-segmen
dengan saiz langkah
h=(b-a)/n

Jika ada dua nilai anggaran menggunakan saiz langkah h_1 dan h_2,

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \qquad (22.1)$$

Jika ralat adalah seperti persamaan (21.31) iaitu:

$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 f''$

$$E \cong -\frac{b-a}{12} h^2 f'' \qquad (22.2)$$

Maka, nisbah antara 2 ralat adalah:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \cong \frac{h_1^2}{h_2^2} \qquad (22.3)$$

Masukkan dalam persamaan (22.1)

$$I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = I(h_2) + E(h_2)$$

selesaikannya,

$$E(h_2) \cong \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(h_1 / h_2\right)^2}$$

anggaran ini dimasukkankan ke dalam

$$I = I(h_2) + E(h_2)$$

menjadi:

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(h_1/h_2)^2 - 1}\left[I(h_2) - I(h_1)\right] \qquad (22.4)$$

Bagi kes di mana selang adalah separuh ($h_2=h_1/2$) persamaan di atas menjadi:

$$I \cong I(h_2) + \frac{1}{(2)^2 - 1}\left[I(h_2) - I(h_1)\right]$$

atau

$$I \cong \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1) \qquad (22.5)$$

Contoh

- Daripada bab 21, didapati fungsi

  $$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

  dari a = 0 dan b = 0.8 dengan keputusan

Segmen	h	kamiran	ε_t%
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

Penyelesaian

Dengan menggunakan segmen 1 dan 2,

$$I \cong \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.367467$$

dengan ralat

$$E_t = 1.640533 - 1.367467 = 0.273067 (\varepsilon_t = 16.6\%)$$

Dengan menggunakan segmen 2 dan 4,

$$I \cong \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.623467$$

dengan ralat

$$E_t = 1.640533 - 1.623467 = 0.017067 (\varepsilon_t = 1.0\%)$$

Persamaan (22.4) menggabungkan 2 aplikasi hukum trapezoid dengan ralat $O(h^2)$ untuk mendapatkan nilai ketiga dengan ralat $O(h^4)$. Oleh itu dengan menggabungkan 2 aplikasi $O(h^4)$, maka $O(h^6)$

$$I \cong \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_I \qquad (22.6)$$

Dan 2 keputusan $O(h^6)$ boleh digabungkan untuk mendapat $O(h^8)$

$$I \cong \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_I \qquad (22.7)$$

Contoh

- Dengan anggaran dua kamiran $O(h^4)$ daripada contoh sebelum ini, iaitu 1.367467 dan 1.623467 dapatkan kamiran bagi fungsi

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a = 0 dan b = 0.8.

Penyelesaian

- Menggunakan persamaan (22.6),

$$I = \frac{16}{15}(1.623467) - \frac{1}{15}(1.367467)$$
$$= 1.640533$$

di mana merupakan jawapan yang tepat sehingga tujuh nombor bererti.

Algoritma Kamiran Romberg

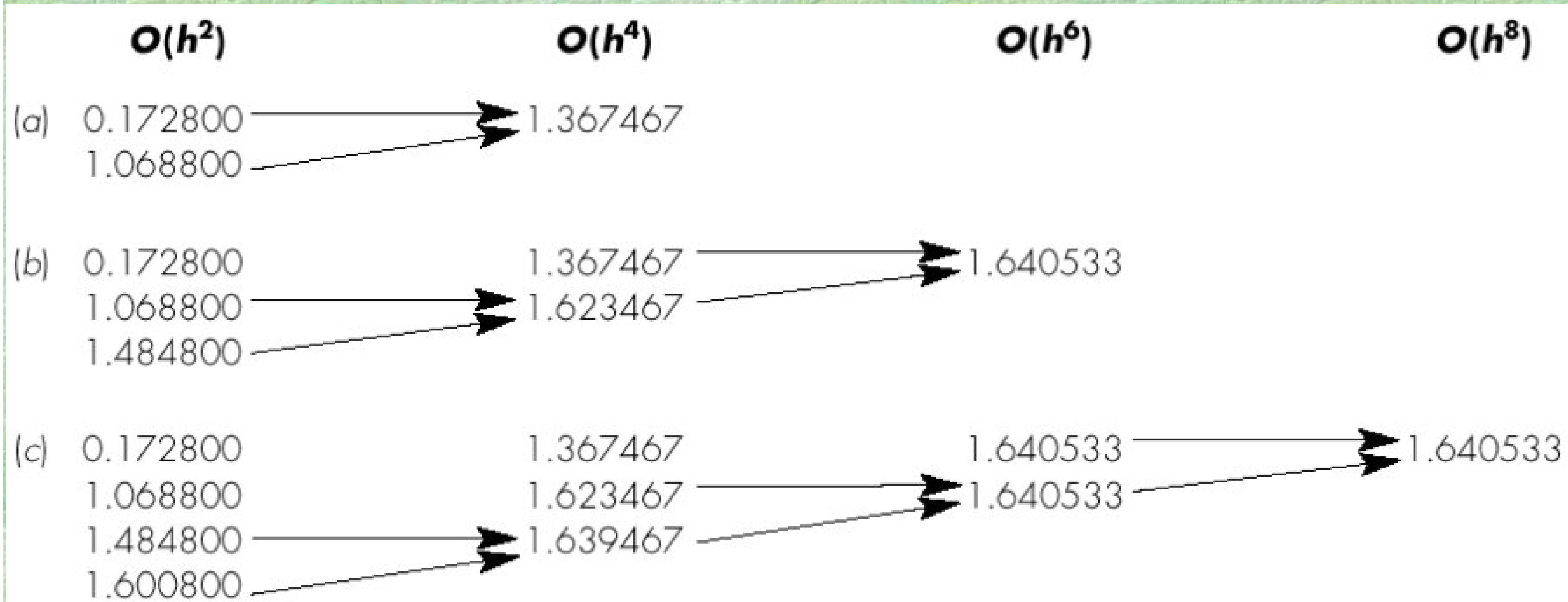
- Persamaan-persamaan (22.5), (22.6) dan (22.7) boleh diringkaskan menjadi:

$$I_{j,k} \cong \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1} \qquad (22.8)$$

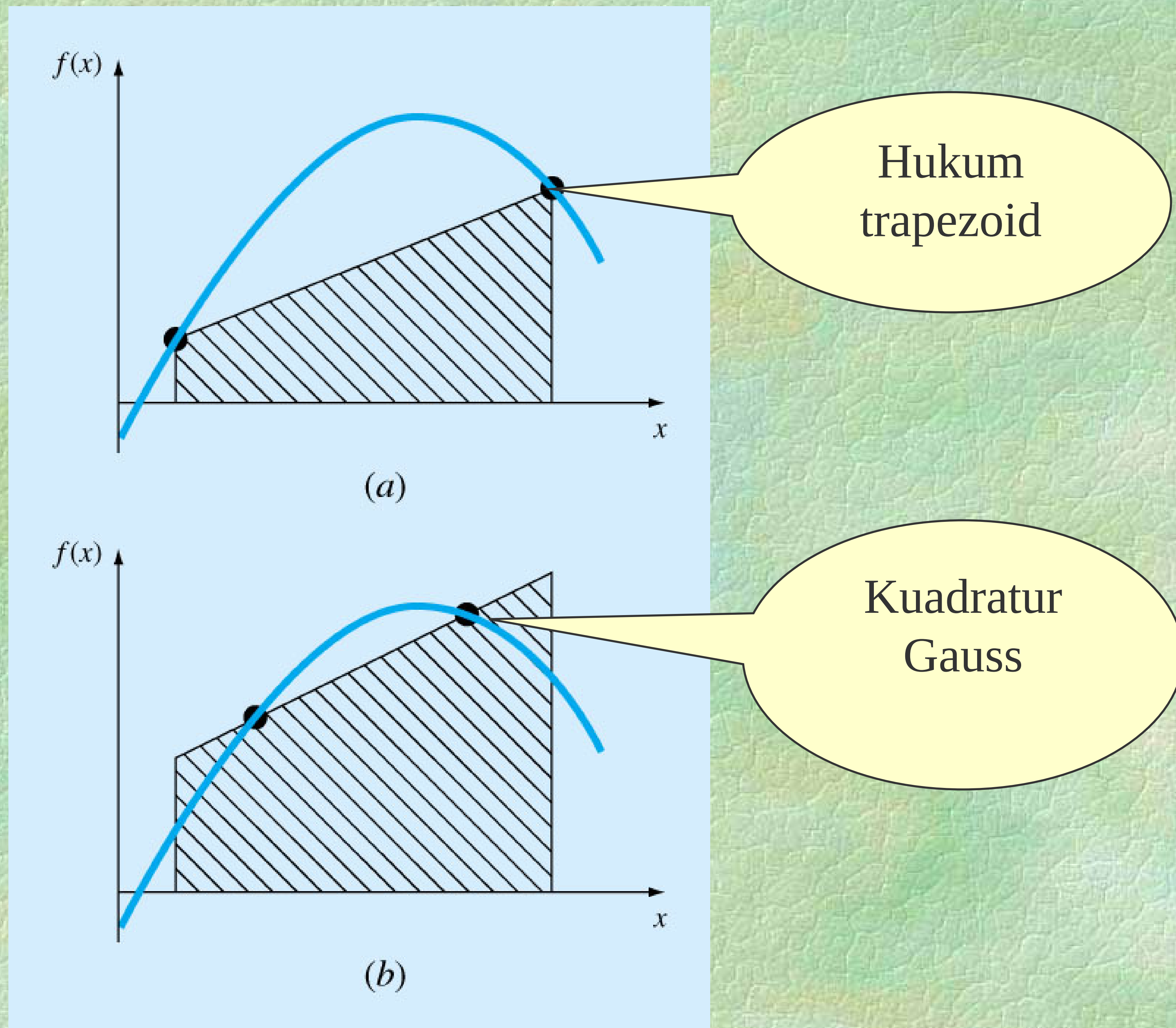
- Dengan ralat

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{I_{1,k} - I_{k-1}}{I_{1,k}} \right| 100\% \qquad (22.9)$$

Secara grafik,



Kuadratur Gauss


f(x)
x
(a)
f(x)
x
(b)
Hukum
trapezoid
Kuadratur
Gauss

Terbitan formula 2 titik Gauss-Lengendre

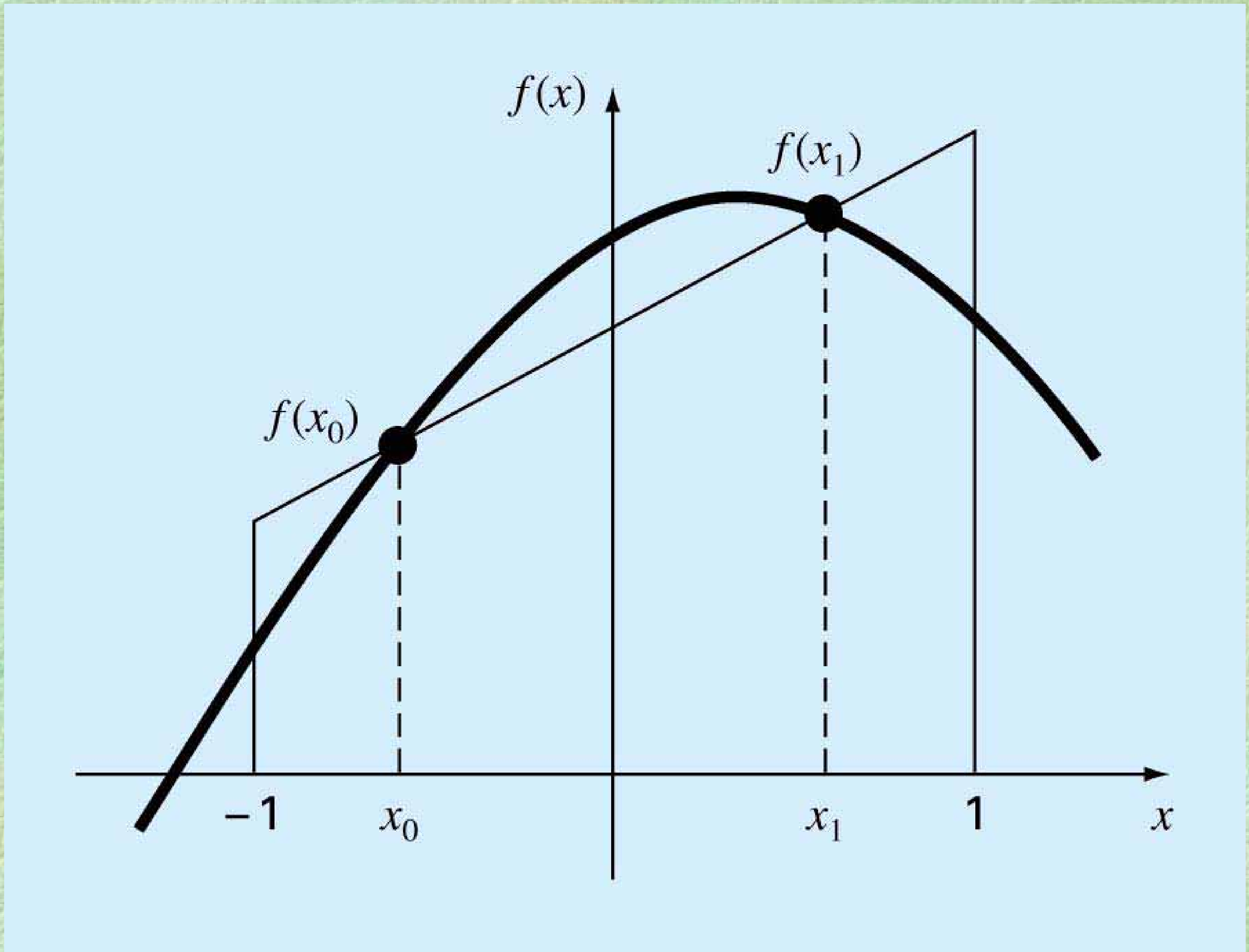
- Sebagaimana terbitan bagi hukum trapezoid*, kuadratur Gauss juga ditentukan dari:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) \qquad (22.12)$$

- dengan nilai c_0 dan c_1 adalah pemalar yang tidak diketahui
- Maka, terdapat 4 nilai pemalar yang harus dicari dan perlu 4 keadaan untuk menyelesaikannya.

*sila rujuk bahagian 22.3.1

Terbitan formula 2 titik Gauss-Lengendre



Terbitan formula 2 titik Gauss-Lengendre

- Sementara 2 keadaan lagi dengan andaian ia boleh dikamirkan oleh fungsi parabolik ($y = x2$) dan fungsi kubik ($y = x3$).
- Maka terdapat 4 persamaan yang harus diselesaikan iaitu:

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad (22.13)$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad (22.14)$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad (22.15)$$

$$c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \qquad (22.16)$$

perhatikan bahawa had bagi kamiran$_2$ ini adalah dari 1 hingga -1

Keempat-empat persamaan ini boleh diselesaikan serentak, hasilnya:

$$c_0 = c_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0.5773503...$$

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773503...$$

Masukkannya ke dalam persamaan (22.12),

$$I \cong f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (22.17)$$

dikenali sebagi formula Gauss-Lengendre dua titik

- Perlu cari persamaan untuk mendapatkan formula yang umum supaya had kamiran adalah dari –1 dan 1 sahaja... hmmmm

- Andaikan x_d merupakan pemalar baru bagi nilai x yang asal, di mana:

$$x = a_0 + a_1 x_d \qquad (22.18)$$

- Jika had bawah x adalah a, di mana nilai baru xd = -1, maka persamaan (22.18) boleh digantikan dengan:

$$a = a_0 + a_1(-1) \qquad (22.19)$$

- Begitu juga dengan had atas, x = b, di mana nilai batu xd = 1 boleh digantikan dengan:

$$b = a_0 + a_1(1) \qquad (22.\ 20)$$

Selesaikan persamaan (22.19) dan (22.20) :

$$a_0 = \frac{b+a}{2} \qquad (22.21)$$

dan

$$a_1 = \frac{b-a}{2} \qquad (22.22)$$

Masukkan persamaan (22.21) dan (22.22) ke dalam (22.18):

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} \tag{22.23}$$

Persamaan (22.23) boleh diterbitkan untuk mendapat:

$$dx = \frac{b-a}{2}dx_d \tag{22.24}$$

Contoh

- Gunakan persamaan (22.17) untuk menganggarkan nilai kamiran bagi fungsi:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

dari a = 0 dan b = 0.8.

Penyelesaian

- Sebelum membuat sebarang kamiran, had kamiarn perlu ditukar kepada 1 hingga –1 dengan menggantikan a = 0 dan b= 0.8 pada persamaan (22.23):

$$x = 0.4 + 0.4x_d$$

- Di mana hubungan terbitan persamaan ini:

$$dx = 0.4dx_d$$

Penyelesaian

- masukkan persamaan-persamaan baru ke dalam fungsi kamiran:

$$\int_0^{0.8}\left(0.2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\Big[0.2+25(0.4+0.4x_d)-200(0.4+0.4x_d)^2+675(0.4+0.4x_d)^3$$

$$-900(0.4+0.4x_d)^4+400(0.4+0.4x_d)^5\Big]0.4x_d$$

*bandingkan dengan hukum trapezoid, 1/3 dam 3/8 Simpson

Penyelesaian

- gunakan nilai x_d sebagai $-1/\sqrt{3}$ dan hasilnya adalah 0.516741
- gunakan nilai x_d sebagai $1/\sqrt{3}$ dan hasilnya adalah 1.305837
- Masukkan ke dalam persamaan (22.17):

$$I \cong 0.516741 + 1.305837 = 1.822578$$

Nilai sebenar:1.640533
Ralat adalah –11.1%